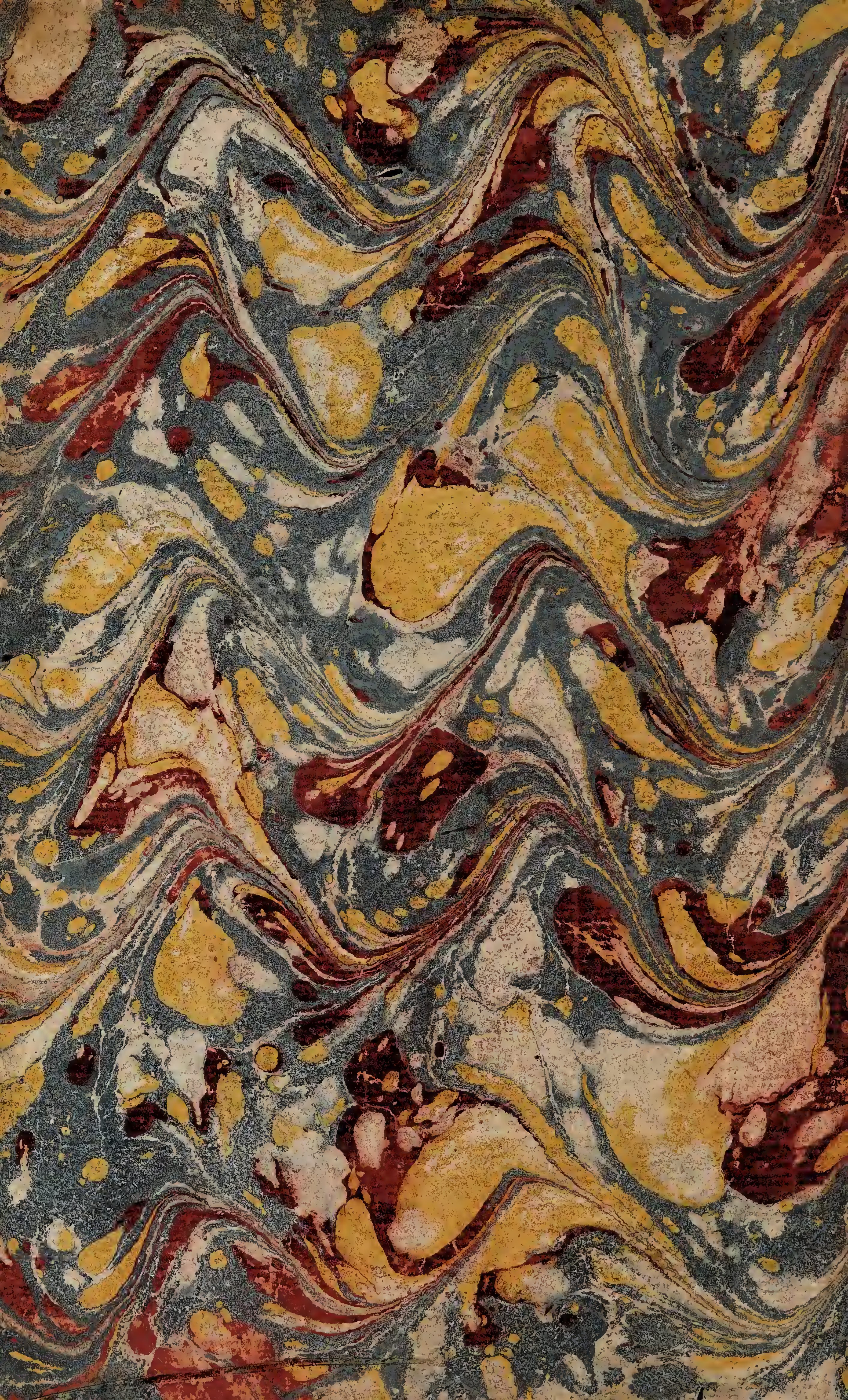
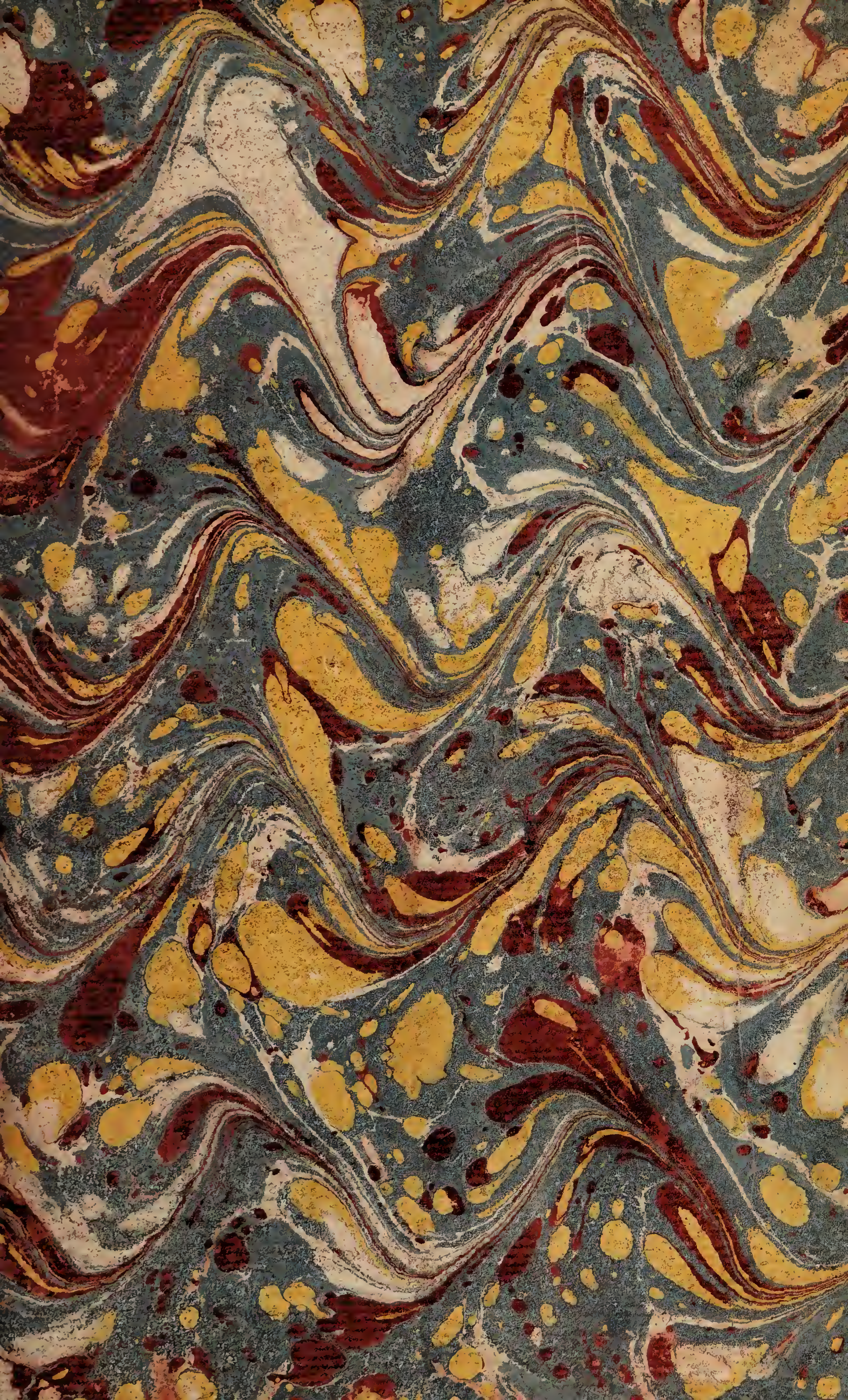




ELÉMENS

DE

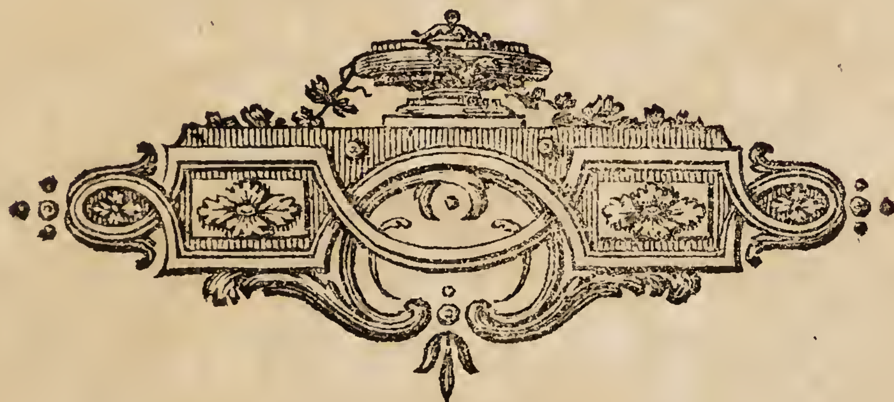
STÉRÉOTOMIE.

TOME PREMIER.

ÉLÉMENS
DE STEREOTOMIE,
A L'USAGE
DE L'ARCHITECTURE,
POUR
LA COUPE DES PIERRES.

PAR M. FREZIER, Lieutenant Colonel, Chevalier de l'Ordre Royal & Militaire de Saint Louis, Directeur des Fortifications de Bretagne.

TOME PREMIER.



A PARIS,
Chez CH. ANT. JOMBERT, Imprimeur-Libraire du Roi, pour l'Artillerie & le Génie, quai des Augustins, à l'Image Notre-Dame.

M. D. CC. LX.

AVEC APPROBATION ET PRIVILEGE DU ROI.


WELLCOME
HISTORICAL
MEDICAL
LIBRARY



PRÉFACE.

LE ſujet dont il s'agit ici, n'étant ni à l'uſage ni à la portée de tout le monde, n'eſt pas de l'eſpece de ceux qui excitent la curioſité d'un grand nombre de lecteurs; je crois pouvoir les réduire à trois claſſes, qu'il n'eſt pas aiſé de contenter, parce qu'ils ont des vues différentes.

La premiere eſt de quelques gens de lettres, amateurs des Arts, qui étant initiés dans la Géométrie, ne cherchent que la théorie des productions qui méritent leur attention : telle eſt dans l'architecture la ſcience de la *coupe des pierres*. Ceux-ci contens de ſe mettre en état de juger de ce qu'il y a de ſingulier dans un édifice, ſe bornent à s'inſtruire des raiſons des opérations qui ont produit quelque effet remarquable; & comme ils n'ont pas beſoin de la pratique, ils regardent l'*épure*

circonſtanciée des *traits*, c'eſt-à-dire les deſſeins ſur leſquels on dirige les modeles pour l'exécution, comme des détails ſuperflus qu'ils voudroient retrancher : j'ai lieu de penſer ainſi, ſur ce que le Libraire de Strasbourg, qui a fait la premiere édition de ma Stéréotomie, n'ayant fait aucune difficulté de vendre ſéparément le premier tome (qui ne contient que des principes de théorie) à ceux à qui la pratique eſt inutile, en a beaucoup plus débité que du ſecond & du 3e, qui ne contiennent que des détails des différentes eſpeces d'ouvrages de *traits des voûtes*, quoique plus amples, plus corrects, & plus variés que ceux des Auteurs qui m'ont précédé ; de ſorte que celui de Paris, qui en avoit acquis le fonds, a été obligé d'anticiper une ſeconde édition de ce premier tome, pour completer ce qui reſtoit d'exemplaires du ſecond & du troiſieme. Il eſt vrai que ce même tome a été le premier Livre qui ait donné la *théorie de la coupe des pierres, qui étoit preſque ignorée avant moi*. Je crois pouvoir le répéter, après ce

qui en a été dit dans la nouvelle Encyclopédie, au mot *architecture* : ainſi il avoit pour lui la nouveauté, quoiqu'il n'en manquât pas dans les deux tomes ſuivans; premiérement en pluſieurs circonſtances de pratiques : ſecondement, en ce qu'elles ſont partout accompagnées de démonſtrations, qui en prouvent la juſteſſe, laquelle étoit ſouvent mal-à-propos ſuppoſée chez les Auteurs qui avoient traité cette matiere, comme je l'ai fait remarquer lorſque le cas s'eſt préſenté; j'ai la ſatisfaction de voir que ces nouveautés ont été jugées intéreſſantes, puiſqu'on va continuer la ſeconde édition d'un de ces Livres, qui en ont rarement deux en peu de tems, parce que la grande quantité de planches de gravure occaſionne beaucoup de dépenſe, qui ne peut être rembourſée avec bénéfice, que par un grand nombre de curieux dans un genre de ſcience, où naturellement il y en a fort peu d'une érudition ſuffiſante à pouvoir en profiter.

La ſeconde claſſe des lecteurs de cette matiere ſont les Artiſans, Charpentiers,

Menuisiers, Appareilleurs, & quelques Marbriers qui n'ont besoin, au contraire, que des instructions d'une pratique servile, qu'ils considerent comme les secrets de leur profession : ceux-ci n'étant pas en état d'entendre des raisonnemens, fondés sur la Géométrie, les passent comme des inutilités, qui ne font que les embrouiller : ils ne veulent que des descriptions bien détaillées, des *traits* tout digérés & circonstanciés pour l'exécution de l'ouvrage qu'ils ont à faire, comme ceux qu'on trouve dans les Livres de *Deran* & de la *Rue*, particuliérement de ce dernier, dont les planches sont beaucoup plus expressives, plus grandes & mieux gravées, sans s'embarrasser des démonstrations, ni s'il est des manieres d'opérer plus générales & plus correctes, comme on en trouve dans les deux derniers tomes de ma Stéréotomie.

La troisieme classe des lecteurs de cette matiere, est de ceux qui sont intéressés à s'instruire de la science & de l'art de la *coupe des pierres*, comme d'un des principaux objets de l'état qu'ils embrassent;

tels ſont les jeunes Architectes dans le genre civil, les uns pour ſe mettre en état de diriger les bâtimens des particuliers, les autres pour les publics, comme ſont les ponts & chauſſées; & enfin ces Officiers militaires, deſtinés à préſider aux fortifications, ci-devant diſtingués des Architectes par le nom d'*Ingénieurs*, que pluſieurs états civils ſe ſont arrogé par un abus qui confond les profeſſions.

Comme cette derniere claſſe eſt compoſée de gens qui ont des principes de Géométrie, c'eſt pour eux principalement que j'ai fait cet abrégé de ma Stéréotomie, en conſidération de ce qu'étant partagés à différens objets d'occupations indiſpenſables, ils peuvent n'avoir pas le tems de ſe livrer à l'étude d'un Traité de longue haleine ſur une ſeule partie de l'architecture, dont l'uſage ne ſe préſente pas plus ſouvent que bien d'autres. J'y ai d'ailleurs été invité par un célebre Profeſſeur du Roi, M. *Blondel*, connu par ſes beaux ouvrages ſur les décorations, & recommandable par le zele qu'il a pour la per-

fection de l'architecture, qui l'engage à communiquer publiquement ſes lumieres à ceux qui veulent en profiter. Je ſouhaite que cet abrégé élémentaire puiſſe ſeconder ſes bonnes intentions, en facilitant à ſes Eleves, & à tous autres, une étude qui paroît hériſſée d'épines à ceux qui n'en pénetrent pas les principes.

Il me ſemble que j'ai lieu de l'eſpérer, & de me flatter du ſuccès, à en juger par ce que j'ai vu & oui dire à quelques perſonnes qui avoient bien entendu le premier tome de ma Stéréotomie, qu'aidés de deux ou trois leçons de pratique à *couper du trait*, c'eſt-à-dire à s'exercer ſur de petits corps ſolides, faciles à couper & tailler, pour y dreſſer des paremens, délarder des ſurfaces courbes, appliquer les panneaux ou modeles de leur contour, concavité & convexité, & ceux des ouvertures des angles de leurs inclinaiſons mutuelles, ils n'avoient plus beſoin que d'un peu de réflexion pour exécuter en petit toutes ſortes de voûtes; c'eſt tout ce que je me ſuis propoſé dans cet abrégé.

Si cependant quelques Artiſtes ſans théorie, & les particuliers qui font bâtir dans des lieux où l'on ne trouve que des Tailleurs de pierre ſans connoiſſance d'appareil (ce qu'on appelle *des marteaux ſans tête*), ſemblent encore déſirer un ſecond tome pour la pratique des traits les plus uſuels tout digérés; j'employerai volontiers le peu de loiſir que me laiſſent les occupations de mon état à ce travail de cabinet, que la foibleſſe d'un âge déja fort avancé rend pénible & ennuyeux; à leur fournir les ſecours d'inſtructions dont ils ont beſoin pour l'exécution de ce qu'ils doivent conſtruire, perſuadé de cette noble maxime des Romains, que nous ne ſommes pas nés uniquement pour notre plaiſir, mais encore pour nous rendre utiles à la ſociété.

Non nobis, ſed reipublicæ nati ſumus. CIC.



TABLE DES CHAPITRES,

Et des principaux ſujets contenus dans ce volume.

Fin de la Table du premier volume.

ERRATA du premier volume.

PAGE 38, ligne 18, adoptée, *lisez* adaptée.
Page 39, lig. 13, BX & DA, *lisez* DX & BA.
Page 41, lig. 29, *nz*, *lisez* *no*.
Page 44, lig. 10, C*c*, *lisez* C*o*.
Page 47, lig. 28, après *ou*... *su*, & dans... *scd*, *ôtez* est circonscript à la corde *su*.
Page 68, lig. 16, imbra, *lisez* imbrex.
Page 80, lig. 2, OI, *lisez* OL.
Page 96, lig. 30, GKG, *lisez* GKF.
Page 97, lig. 3, petit axe, *lisez* petit ou grand axe.
Ibid. lig. 23, AHB, *lisez* A*h*B.
Page 100, lig. 11, 28, *lisez* 68.
Page 109, lig. 3, TS, *lisez* T*s*.
Page 113, lig. 14, pénétre, *lisez* est pénétré par.
Page 114, lig. 14, HX, *lisez* H*x*.
Page 115, lig. 11, *ky*, *lisez* K*y*.
Page 117, lig. 18, EP, *lisez* EF.
Page 144, lig. 15, OK OL, *lisez* *o*K *o*L.
Page 145, lig. 15, C, *lisez* G.
Page 164, lig. 27, élevés, *lisez* bien élevés.
Page 165, lig. 10, VDK, *lisez* RDK.
Page 186, lig. 30, AP, *lisez* AR.
Page 216, lig. 21, le font, *lisez* se font.
Page 244, lig. 29, BI, *lisez* BL.
Page 251, lig. 15, *e*ML, *lisez* *e*M*l*.

OMISSIONS des indications des figures en marge à y ajouter avant que de lire.

PAGE 22, ligne 7, *lisez* figure 6.
Page 96, lig. 28, *lisez* fig. 45.
Hage 113, lig. 8, *lisez* fig. 54.
Ibid. lig. 9, *lisez* fig. 52.
Page 124, à la marge, fig. 59, *lisez* fig. 58.
Page 126, lig. 20, *lisez* fig. 59 & 60.
Ibid. lig. 22, *lisez* fig. 61, 62, 63, 64.
Page 137, fig. 69, *lisez* fig. 68.
Page 162, lig. 29, *lisez* fig. 79.
Page 170, lig. 11, *lisez* fig. 84 & 88.
Ibid. figure 85, *lisez* fig. 83.
Page 177, lig. 10, *lisez* fig. 103.
Page 178, lig. 6, *lisez* fig. 90.
Page 192, lig. 21, *lisez* fig. 92.
Page 193, lig. 28, *lisez* fig. 96.
Page 207, lig. 6, *lisez* fig. 101.
Ibid. lig. 22, *lisez* fig. 99.



ÉLÉMENS DE STEREOTOMIE A L'USAGE DE L'ARCHITECTURE POUR LA COUPE DES PIERRES.

PREMIERE PARTIE.

Des figures des ſections des corps coupés par des plans, ou pénétrés par des ſolides.

Pour faire du progrès dans les Arts qui ne conſiſtent pas en de pures imitations de ce qui ſe préſente aux yeux, mais où il y a des principes cachés qui en ſont l'ame, & capables de produire des effets ſurprenans comme dans cette partie de l'Architecture, qu'on appelle *la coupe des pierres*, ce n'eſt pas aſſez de voir travailler; il faut remonter aux raiſons ſur leſquelles ſont fondées les

opérations de la main dont elles ſont les guides, pour arriver aux différentes conſtructions qu'on ſe propoſe. Les ſeules pratiques ſont des énigmes qui n'éclairent point l'eſprit, & ne mettent pas le ſpectateur en état d'imiter ce qu'il a vu faire, pour peu qu'il *y* ait de changement dans l'ouvrage, parce qu'il peut être de nature différente de celui qu'il a vu exécuter, quoique ſemblable en apparence ; il ne faut pour cela qu'une petite circonſtance de plus ou de moins.

Dans cet Art il y a deux objets qu'on peut conſidérer ſéparément.

Le premier eſt de former un corps de figure quelconque, par l'aſſemblage d'un grand nombre de petites parties, méthodiquement figurées & arrangées, de façon qu'elles concourent à la figure générale d'une voûte, ou de quelqu'autre partie d'un édifice.

Le ſecond objet eſt de forcer les corps peſans à ſe ſoutenir mutuellement en l'air par une ingénieuſe inclinaiſon & application de quelques-unes de leurs ſurfaces contigues, qui ſe préſentent des appuis réciproques, ſur leſquels ils ſont tellement équilibrés & balancés, que la même peſanteur qui tend à les faire tomber, ne ſert qu'à en affermir l'aſſemblage.

Le premier de ces objets appartient uniquement à la Géométrie, & le ſecond à la Statique. C'eſt du premier dont nous devons nous occuper dans le cours de cet Ouvrage, ſans nous arrêter à la théorie de la Statique, dont on peut ſe paſſer dans l'exécution de notre Art.

Nous nous bornerons donc à rappeller quelques propoſitions des élémens de Géométrie & de Sections coniques, dans leſquels nous ſuppoſons le lecteur ſuffiſamment initié pour entendre nos raiſonnemens & démonſtrations : ſur quoi nous entrons en matiere.

Après qu'on s'eſt déterminé à une figure de voûte relativement à la ſituation des lieux, aux beſoins, ou à la décoration qu'on ſe propoſe, il faut commencer par la comparer à un de ces corps réguliers, ou réguliérement irréguliers, qui ſont connus & analyſés dans les élémens de Géométrie, où l'on trouve les moyens d'en déterminer les contours & les ſections : ainſi s'il s'agit d'un *dôme*, on le comparera à un *hémiſphere*, s'il eſt en plein ceintre en tout ſens, ou à un *hémiſphéroïde*, s'il eſt ſurmonté ou ſurbaiſſé. S'il s'agit d'un *berceau*, on le comparera à un *demi-cylindre droit* ſur ſa baſe, s'il eſt en plein ceintre, ou à un cylindre *ſcalene*, s'il eſt biais ou ſurmonté, ou ſur-

baiſſé à la clef. S'il s'agit d'une *trompe*, on la comparera de même à un cône droit ou ſcalene, ſuivant l'exigence du cas ; une *voûte ſur le noyau* a un anneau ouvert ou fermé ; une *vis* a une helice, qui eſt un anneau tournant & rampant, ainſi du reſte ; & raiſonnant en conſéquence de ces connoiſſances primitives, on conclud que ſi ces voûtes, que nous appellons ſimples, ſont coupées ou traverſées par des murs en différentes directions, il en réſultera des courbes, telles qu'il en arrive dans les corps primitifs, lorſqu'ils ſont coupés par des plans.

Et enfin s'il convient que ces voûtes ſimples ſoient traverſées ou rencontrées par d'autres, de même, ou de différentes eſpeces, on conſidere ce qui arrive à l'interſection des corps primitifs, ſuppoſant qu'ils ſoient pénétrés par d'autres corps ronds, concaves ou convexes ; ce qui fait des voûtes *compoſées*.

§. Si l'on pouvoit faire les voûtes d'une ſeule piece, ces conſidérations ſeroient ſuffiſantes pour parvenir à leurs formations ; mais comme il eſt impoſſible de trouver des pierres de grandeur & de conſiſtance propre à faire un ſi grand ouvrage, & encore plus de les manier, remuer, & tranſporter, on eſt obligé de les faire de

l'aſſemblage d'un très-grand nombre de petites pierres qui doivent ſatisfaire aux deux objets dont nous avons parlé de Géométrie & de Statique, ſçavoir, concourir, ſuivant leur grandeur & poſition, à la formation d'une ſurface concave projettée, & ſe fournir réciproquement des appuis mutuels, cachés dans l'épaiſſeur de la voûte, par les inclinaiſons des lits & des têtes, enſorte qu'elles ſe ſoutiennent en l'air.

§. Ces pierres s'appellent *vouſſoirs*; les ſurfaces ſur leſquelles ils s'appuient, s'appellent les *lits*, celles qui ſont apparentes en dedans, s'appellent *doële*, celles qui le ſont en dehors, s'appellent *extrados*, celles qui terminent leurs faces, s'appellent *tête*, ou *joint de doële*, lorſqu'elles terminent leur longueur entre les lits, ſans autre fonction que de prolonger les rangs des vouſſoirs.

Ainſi dans chaque pierre de vouſſoir, il y a trois ſortes de ſurfaces à conſidérer, ſçavoir, 1°. celles qui concourent à la formation apparente de la voûte, en dedans ou en dehors, telles ſont les *doëles* ou les *extrados*, leſquelles ſont néceſſairement concaves ou convexes, à l'exception du ſeul cas d'une voûte plate. 2°. Celles qui concourent à l'édifice, c'eſt-à-dire à la conſtruction de la voûte conſidérée, non

dans sa figure, mais dans sa solidité; celles-ci sont les lits, & quelquefois aussi les têtes. 3°. Enfin celles qui ne servent de rien ordinairement à la solidité, mais simplement à son étendue ou à sa terminaison, telles sont les *têtes* qui sont souvent apparentes, & celles qui servent à former les joints de doële lorsqu'elles sont cachées.

Les surfaces des deux dernieres especes ne sont pas comme celles de la premiere, nécessairement courbes, mais tantôt planes, comme dans les berceaux droits & les trompes, & tantôt courbes, comme dans les berceaux tournans, & les voûtes sphériques.

§. *Observation & regle générale sur les angles des surfaces entr'elles, qu'on appelle en terme de l'art,* les arêtes.

Comme les pierres sont des matieres la plûpart fragiles, je veux dire faciles à casser plus ou moins, suivant la qualité de leur consistance, il est de nécessité indispensable que les surfaces qui comprennent les voussoirs ne soient pas tellement inclinées entr'elles, qu'elles fassent des angles fort aigus, mais toujours approchant du droit, autant qu'il est possible; car quoique l'angle droit soit moins fort que l'angle obtus, il

lui est toujours préférable pour un joint de lit, par une raison toute simple, qui est qu'étant obtus d'un côté, le contigu de l'autre de ce joint sera nécessairement aigu.

D'où il résulte que la force de ces angles solides étant inégale, la pression de la poussée & du poids de la voûte aura aussi des effets inégaux sur les arêtes contigues des voussoirs, & fera éclater celle qui sera la plus foible : c'est un effet que l'on remarque souvent dans les clavaux des plates-bandes, dont les arêtes sont aigues auprès du sommier *s g i* A, parce que la plate-bande AB étant horizontale, & le joint *g i* incliné à l'horizon, il forme d'un côté un angle aigu A *i g*, & de l'autre un angle obtus *g i* B. Planche I. *Figure* 1.

Dans les voûtes concaves, où les joints de lit font avec la doële un angle mixte de part & d'autre, on a un moyen simple de les faire égaux; si la concavité de la doële est circulaire, en les dirigeant au centre du cercle, & si elle est elliptique ou d'autre courbe, ils le seront encore entr'eux, si l'on tire au point de la courbe une tangente T *t*, à laquelle la direction du joint CP soit perpendiculaire, comme nous le dirons en son lieu. *Fig.* 2.

Cette observation étant présupposée, & la nécessité de mettre de l'ordre dans les rangs des voussoirs, on reconnoîtra que

pour avoir égard à ces conditions, il n'est pas indifférent de diviser la figure totale de la voûte d'une façon plutôt que d'une autre, parce que toutes sortes de direction & de positions de ses rangs ne sont pas possibles dans l'exécution, sans tomber dans quelque inconvénient. Je m'explique par un exemple.

Supposons qu'il s'agisse de faire un dôme qui soit une hémisphere, c'est-à-dire, en terme d'ouvrier, en plein ceintre en tout sens, il sembleroit tout naturel de faire les rangs de voussoirs horizontaux, comme des anneaux qui diminueroient toujours de diametre, à mesure qu'ils s'éléveroient & s'appuieroient en partie les uns sur les autres à plat, ce qu'on appelle, en terme d'Architecture, *en tas de charge*, comme on voit à la fig. 2, dont la moitié ACL est le profil, suivant cette disposition qui satisfait à la Statique, en ce que chaque rang supérieur est suffisamment appuyé sur son inférieur; mais cette construction ne satisfait point aux regles de la solidité des angles ou arêtes des pierres des voussoirs inférieurs, dont les angles à la doële sont tous nécessairement aigus, & de plus en plus, à mesure que la voûte s'éleve, comme on le voit en *ei*A, *f*. 2. 1.

Fig. 2.

Le même inconvénient se trouve en fai-

ſant les rangs de vouſſoirs verticaux, dont la moitié LCB eſt le profil, non pour la ſolidité à certains égards, mais pour la difficulté de faire des arêtes fort aigues en taillant la pierre, tel ſeroit l'angle *g*.4.3 & P.5.4, quoique cette foibleſſe ait plus à ſouffrir de la preſſion du rang contigu, parce que chaque rang eſt une arcade qui peut ſe ſoutenir ſans le ſecours de ſon voiſin, mais auſſi il pouſſe beaucoup à ſes impoſtes, où il faut en épaiſſir les pieds droits. *Fig.* 2.

Enfin il eſt encore clair que ſi les rangs de vouſſoirs étoient inclinés à l'horizon, comme R*r*, V*u*, ils participeroient encore des deux inconvéniens. *Fig.* 2.

D'où il ſuit que les diviſions de la voûte ſphérique en rangs de vouſſoirs par tranches paralleles de ſections planes ne conviennent point à la conſtruction, parce qu'il n'y a de ſection plane qui puiſſe couper la ſurface d'une ſphere à angles égaux de part & d'autre, que celle d'un cercle majeur, c'eſt-à-dire qui paſſe par le centre de la ſphere, en quelque ſituation qu'il puiſſe être, horizontale, verticale, ou inclinée, le rayon étant toujours perpendiculaire à la tangente; ce qui eſt démontré dans les Elémens de Géométrie (*Eucl. l.* 3, *prop.* 16), mais non pas les cordes au point d'attouchement.

Cependant les rangs des voussoirs d'une voûte sphérique peuvent être, & le sont très-fréquemment, en toutes sortes de situations horizontales, verticales, & inclinées; mais leurs lits ne pouvant être plans, comme nous venons de le démontrer, sont nécessairement des surfaces courbes en zones coniques, concaves & convexes, terminées par des lignes courbes au contour de la section plane, & droites dans la direction de leur épaisseur, suivant le rayon, pour conserver l'égalité des angles des arêtes des lits contigus, sçavoir de l'inférieur & du supérieur, en terme de l'art de *dessus* & de *dessous*.

De-là naissent plusieurs difficultés dans les opérations des *traits* qu'on ne peut résoudre sans le secours de la Géométrie.

Premiérement, à l'égard des sections planes qui peuvent être terminées par de différentes courbes, comme dans le cône, où il y en a de quatre especes.

Secondement, pour leur tirer des tangentes par des points donnés, & y diriger perpendiculairement les joints.

Troisiémement, pour reconnoître les courbes des intersections des surfaces de deux voûtes différentes, ou semblables, qui se croisent, ou aboutissent l'une à l'autre; ce qui arrive dans tous les cas des

voûtes *composées*, qui sont plus ordinaires que les simples, lesquelles courbes sont quelquefois planes, & souvent à *double courbure*.

Pareille pénétration arrive aussi dans certaines voûtes simples, telles sont les sphériques, sphéroïdes & annulaires, où les lits sont des zones ou portion de cônes tronqués, qui pénetrent le corps de ces voûtes, & donnent à leurs surfaces concaves & convexes des courbes qui seroient à double courbure, si l'on n'affectoit de faire ces lits horizontaux, parce qu'alors elles deviennent planes à différentes hauteurs au dessus de l'horizon, plus basse à la rencontre de la surface de la doële, & plus haute à celle de l'extrados.

Comme nous avons à parler à ce second genre de lecteurs, qui ne sont pas beaucoup initiés dans la Géométrie, nous allons leur exposer les difficultés de la coupe des pierres des voûtes sphériques & sphéroïdes, dont nous parlons, par une comparaison familiere de leur figure avec celle d'un melon, citrouille, ou orange, & de celles qui surviennent à leurs parties, lorsque ces fruits sont coupés par des plans, ou pénétrés par quelqu'autre corps rond : nous supposerons que le *plan* coupant est une feuille de fer blanc bien applanie, dont

on se servira au lieu de couteau, pour étudier la nature, au défaut des connoissances de la Géométrie.

S'il s'agit de faire un *dôme* sphérique en plein ceintre, on peut prendre pour modele la moitié d'une orange bien ronde, dont l'épaisseur de l'écorce pourra exprimer celle de la voûte; mais comme elle est un peu mince, on ne peut pas facilement y faire remarquer la figure des lits: ainsi nous lui préférons un melon, dont la pulpe & l'écorce ont plus d'épaisseur; & comme il y a des melons alongés, & des côtes tracées par la nature, sur la surface d'un pole à l'autre, nous y trouverons le modele d'un
Fig. 3. dôme *surmonté* (voyez la fig. 3, pl. 1), c'est-à-dire dont le demi-diametre de l'axe du milieu dans sa longueur est plus grand que celui de sa largeur en travers, perpendiculairement à celui de sa longueur.

Nous y trouverons aussi en le coupant suivant cette longueur, le modele d'une
Fig. 4. voûte en dôme *alongé*, dont le contour de sa naissance n'est pas un cercle, mais une ellipse, que les ouvriers appellent *ovale* ou *anse de panier*.

Enfin nous trouverons dans une citrouille applatie, coupée en travers dans sa plus grande largeur, le modele d'une voûte en cul-de-four, ou sphéroïde applati, dont la

hauteur de la clef, meſurée ſur le niveau de la naiſſance, eſt moindre que le demi-diametre de ſon contour, pris au niveau de ſon *impoſte*.

Il s'agit à préſent de couper la moitié de ces trois ſortes de fruits en un grand nombre de parties, leſquelles, malgré pluſieurs diviſions, puiſſent ſe ſoutenir dans la place où elles ſont ſans tomber, enſorte qu'elles ſe ſoutiennent mutuellement, quoïque le milieu ſoit vuide de ſa graine, & qu'il n'y ait que l'épaiſſeur de la pulpe.

Il eſt déja évident que ſi je coupe cette moitié de melon, ſuivant les côtes que la nature a tracées ſur ſa ſurface, en y faiſant paſſer ma feuille de fer blanc, puis en la retirant doucement, ces parties de côtes ſe ſoutiendront par le bas, ſur leur aſſiete, & par le haut en s'appuyant les unes contre les autres.

D'où je conclus en langage mathématique, que toutes les ſections planes faites par l'axe du ſphéroïde ſuppoſé en ſituation verticale, ſe ſoutiennent mutuellement, non ſeulement lorſqu'elles ſont entieres juſqu'au *pole*, qui eſt la *clef* du ſommet, mais encore lorſque les pointes de ces côtes ſont coupées horizontalement, parce qu'étant penchées les unes contre les autres, elles ſe ſoutiennent réciproquement dans leur in-

clinaiſon, enſorte que l'une étant ôtée, les autres doivent tomber, parce que chacune de ces parties eſt un appui commun à toutes les autres. Il ne s'agit plus que de ſçavoir comment on doit former les *lits*, c'eſt-à-dire les appuis ſupérieurs & inférieurs aux lits de deſſus & de deſſous, pour que les parties entaſſées jouiſſent du même avantage d'être appuyées ſur leur baſe, & dans leur hauteur inclinée. Il eſt clair qu'à ce dernier égard, le ſecond rang de diviſion de parties horizontalement rangées, jouit du même avantage que celles du premier & du dernier rang de hauteur.

Mais on s'apperçoit que la baſe de chacune de ces parties, dont la charge fait effort pour les pouſſer en dehors au vuide, où il n'y a rien pour les arrêter, a beſoin d'être retenue : car ſi elles étoient, comme celles de l'impoſte, ſur un plan horizontal, elles tendroient à gliſſer en dehors, parce que leur inclinaiſon eſt bien différente de celle de *l'impoſte*, où la naiſſance de la courbure eſt preſque verticale, par conſéquent ſans pouſſée & nulle : donc la baſe du ſecond rang doit être un peu inclinée pour l'appuyer, comme un étançon, le troiſieme davantage, le quatrieme encore plus, juſqu'à la clef où cet appui doit approcher d'une verticale, c'eſt-à-dire d'une ligne à plomb.

D'où il ſuit que dans les voûtes en dôme, il n'y a de lit plat & de niveau que celui de l'impoſte; & comme l'inclinaiſon des lits doit être la même ſur chaque ſection verticale, il ſuit que les lits doivent être creux en portions d'un cône tronqué renverſé, dont le ſommet eſt en bas, au centre de la baſe de la voûte, ſi elle eſt exactement ſphérique, ou à quelque point de ſon axe, ſi elle eſt ſphéroïde; ce qui occaſionne pluſieurs difficultés, qui ne ſont point dans une voûte ſphérique, laquelle eſt partout uniforme.

Ces difficultés ſont 1°. à l'égard des contours des vouſſoirs, que ſuppoſant une telle voûte, comme un demi-melon couché, ſuivant ſon axe, en ſituation horizontale, recoupé perpendiculairement ſuivant ſon axe, & à ſon axe en ſituation verticale en quatre parties, ſubdiviſées en rangs horizontaux & verticaux; aucune de ces parties n'eſt égale à l'autre, ni en grandeur, ni en contour dans chaque quart.

1°. En grandeur, parce qu'elles doivent toujours ſe reſſerrer en approchant de la clef, par des ſections verticales, c'eſt-à-dire *à plomb*, comme les côtes du melon vers leurs poles.

2°. En contour, parce que leurs arêtes faiſant partie de l'ellipſe de la baſe & de

toutes les ſections paralleles, celles qui approchent le plus du grand axe ſont toujours plus concaves que celles qui approchent du petit ; ainſi elles ſont toutes inégalement courbes horizontalement, & ſuppoſant le ſphéroïde régulier, fait par la révolution d'une demi-ellipſe, elles ſeront encore toutes de courbure inégale en hauteur, parce que nous démontrerons dans la ſuite, que toutes les ſections planes inclinées à l'axe d'un ſphéroïde régulier ſont encore des ellipſes ; de ſorte que la même inégalité de contours des arêtes ſe trouve dans les joints montans, comme dans les joints de niveau, & que des huit arêtes qui bordent & comprennent un vouſſoir, il n'y en a aucune égale à l'autre.

De cette inégalité de contours, il eſt aiſé de conclure celle des ſurfaces concaves & convexes de la doële & de l'extrados, & des lits concaves en deſſus & convexes au deſſous.

En voilà ſuffiſamment pour donner une idée des difficultés qui ſe rencontrent dans l'art de la *coupe des pierres*.

On en auroit apperçu de nouvelles, ſi l'on avoit ſuppoſé de l'irrégularité dans le ſphéroïde, comme dans cette eſpece de voûte, qu'on appelle en termes de l'Art, *voûte en cul-de-four ſurhauſſé ou ſurbaiſſé ſur un*

un plan ovale. Mais il nous ſuffit d'avoir préſenté une idée générale de l'attention & des connoiſſances dont on a beſoin pour l'exécution de cet Art, afin de prévenir le lecteur de la néceſſité d'en étudier la théorie, ſi l'on veut agir avec connoiſſance de ce qu'on fait, & de ce qu'on doit faire, à laquelle théorie on ne peut parvenir que par un examen des *courbes* qui réſultent des ſections planes des corps ronds; & de celles qui ſe forment à la ſurface des mêmes corps, lorſqu'ils ſont pénétrés par d'autres corps ronds, de même ou de différentes eſpeces, en quoi conſiſte le premier Livre de ma Stéréotomie, dont je donne ici un abrégé.



CHAPITRE I.

Des Sections planes des corps réguliers.

§.

De la Sphere.

LA ſimplicité & l'uniformité de la ſphere n'admettent point de variété dans les ſections qu'on en peut faire, en la coupant par des plans; en quelque ſituation qu'on les ſuppoſe, ils produiront toujours des cercles, la ſeule différence qui en peut réſulter, ne conſiſte qu'en plus ou moins de grandeur.

Si la ſphere eſt coupée par ſon centre, ils ſeront tous égaux, & appellés *majeurs*; ſi elle l'eſt hors du centre, ils ſeront tous inégaux, & appellés *mineurs*, diminuant d'autant plus qu'ils ſeront éloignés du centre, tellement qu'ils ſe réduiront à un point à chaque pole.

On reconnoît ces différens effets, par la ſeule Géométrie naturelle; cependant on en trouve la démonſtration dans la quinzieme propoſition du 3e Livre *d'Euclide.*

Pour donner une idée de la différence de ces cercles conſidérés aux ſurfaces concaves & convexes d'une voûte ſphérique,

il faut imaginer un demi-cercle AOB, tournant autour de ſon axe AB, dont la révolution forme une ſphere parfaite : mais comme il n'eſt queſtion pour nôtre objet que d'un hémiſphere, il nous ſuffit de ſuppoſer un quart de couronne de cercle AOR*a* faiſant ſa révolution autour du demi-axe AC; il eſt viſible qu'elle formera un hémiſphere creux, telle qu'eſt une voûte ſphérique, diviſée en pluſieurs rangs de vouſſoirs horizontaux, ſi l'axe A C eſt vertical; ſi du centre C on tire aux diviſions 1, 2, 3 des rayons C1, C2, C3, ils couperont le contour intérieur *ae*R aux points *d*, *e*, *f* qui déterminent les diametres des cercles horizontaux *hd*, *ie*, *lf* à la doële, & G3, H2, K1 à l'extrados, c'eſt-à-dire à la ſurface extérieure. *Fig. 5.*

Où l'on voit que chaque rang de vouſſoirs eſt terminé par quatre cercles de rayons inégaux, ſçavoir, deux au contour inférieur, l'un à la doële, l'autre à l'extrados, & deux au contour ſupérieur du même rang, l'un à la doële, l'autre à l'extrados, qui bordent le lit de deſſus, ſur lequel s'appuie le rang de vouſſoir auquel il ſert de baſe. *Fig. 5.*

Si au lieu de conſidérer la révolution d'un demi-cercle autour de ſon axe AB en ſituation verticale, c'eſt-à-dire à plomb

(en terme de l'Art), on ſuppoſe que cet axe eſt en ſituation horizontale, comme en DO, il ſe formera une ſphere égale en tout à celle de la ſuppoſition précédente, mais qui changera de nom, à cauſe que les rangs de vouſſoirs qui étoient horizontaux deviendront verticaux; alors leurs diametres étant perpendiculaires à l'horizon, c'eſt-à-dire à angle droit, la ſphere s'appellera droite, comme la ſphere du monde l'eſt à l'égard de ceux qui habitent ſous l'équateur; alors le point A, qui étoit le pole de la ſphere parallele, vient ſe placer en D à l'horizon, & le point B en O.

D'où il réſulte que les rangs de vouſſoirs qui tournoient autour d'une voûte de cette eſpece, ſont coupés par le milieu dans cette nouvelle ſituation par le cercle horizontal, dont DO eſt le diametre & le niveau de l'impoſte ſur laquelle s'appuient tous ces rangs de vouſſoirs, qui forment des arcades inégales, qui ne s'appuient plus les unes ſur les autres, mais ſe ſoutiennent ſur leur baſe plane horizontale chacune en particulier, les unes à côté des autres, comme l'arcade repréſentée par N3, 2*n* ſur ſa baſe N*n*, à côté de l'autre arcade *n*21V.

Il réſulte encore de ce changement de poſition de la voûte ſphérique, que dans

celle où les rangs de voussoirs sont horizontaux, il n'y a qu'un pole en A qui est au sommet de la pierre ronde du milieu, qu'on appelle la *clef*, & que dans la voûte en sphere droite, il y a deux poles en D & en O à l'extrados, & en P & en R à la doële, ou, au lieu d'un cercle entier, il n'y a qu'un demi-cercle, qui ne s'appelle plus une *clef*, mais un *trompillon*, comme on le voit représenté à la figure 6 en P, qui est à *l'imposte*, c'est-à-dire à la naissance de la voûte, appellée *voûte en niche*, ou *voûte en hemisphere droite*, c'est-à-dire dont les circonférences des joints de lit seront dans des plans verticaux, au lieu que dans l'exemple précédent ils étoient horizontaux ; ce qui est exprimé par leurs rayons 1.V; 2.*n*; 3N; AC à l'extrados, & *a*C, *et*, *fu*, &c. à la doële ; de sorte que la voûte (comme l'hémisphere) dans cette situation a deux poles D & O, au lieu qu'elle n'en avoit qu'un en A dans la situation précédente ; ce qui ne change cependant rien à la régularité de la figure, ni dans la concavité de sa surface intérieure, ni à la convexité de l'extérieure, ni à la direction des surfaces des lits coniques, qui tendent toujours au centre C de la sphere, comme dans l'exemple précédent, mais qui produit un effet tout différent dans la construction d'une voûte, *Fig. 5.*

en ce que chaque rang de vouſſoirs, faiſant une arcade, peut ſe ſoutenir ſans le ſecours de ſes deux contigus; enſorte qu'on peut conſtruire un quart, ou une moitié de cette voûte, ſans être obligé de la faire complete. Cette partie s'appelle ordinairement une *niche*, dont la figure P S Q repréſente une moitié, au fond de laquelle P eſt le pole de tous les cercles du quart de ſphere, repréſenté en profil par les quarts de cercle *as*, *bc*, & en élévation par les lignes droites o1, o2, &c.

Fig. 6. Si dans la même révolution du quart de cercle AOC ſur ſon rayon AC on conſidere ce qui réſulte de celle du triangle *m*3C, inſcrit dans ce quart, on reconnoîtra que chacun des rayons des cercles mineurs, exprimés par la moitié de leurs diametres G3, *hd*, H2, *ie*, &c. ſera auſſi le rayon de la baſe d'un cône, dont le triangle G3*c*, *hd*C eſt celui de la ſection plane par l'axe de ce cône, & *d*3 une partie du côté C3 eſt le côté d'une zone de cône tronqué de ſa partie *hd*C, qui eſt dans le vuide de la voûte; ce qui nous mene à la néceſſité de prendre connoiſſance de la nature des cônes, & de leurs ſections planes & ſolides, c'eſt-à-dire qui réſultent de l'interſection de leurs ſurfaces, pénétrée par celle d'un autre corps, comme dans cet exemple, où la ſphere eſt pénétrée par un cône.

CHAPITRE II.

Des Sections de cônes coupés par des plans.

APrès la ſphere, qui eſt de tous les corps le plus ſimple, en ce qu'il n'eſt enveloppé que par une ſurface courbe d'un contour toujours uniforme, le *cône* eſt le corps le moins composé, en ce qu'il n'eſt compris que par deux ſurfaces, l'une courbe, comme un cornet, l'autre plane, qui eſt ſa baſe, laquelle eſt le plus ſouvent un cercle, ſi le cône eſt droit, c'eſt-à-dire perpendiculaire ſur cette baſe, & régulier.

D'où il ſuit qu'il peut y avoir des variétés dans cette figure, provenant de la poſition reſpective des lignes génératrices de ces deux ſurfaces, ſelon leur diverſité de longueur & d'inclinaiſon mutuelle; ce qu'on peut facilement appercevoir par leur génération.

1°. Si l'on ſuppoſe qu'un triangle rectangle A C S ſe meut en tournant autour d'une de ſes jambes S C immobile, il tracera dans l'air, ou, ſi l'on veut le ſuppoſer, dans de l'argille, la cavité d'un cône, qu'on appelle *droit*, parce que l'angle A C S eſt droit, par la ſuppoſition; la ligne immo- *Fig.* 7.

bile S C, qui s'appelle *axe*, ne produit rien dans cette révolution, mais bien les deux autres; car A C produit un cercle, dont elle est le rayon, & A S la surface courbe, qui est la *conique*; la section plane A S *a* de ce corps s'appelle *le triangle par l'axe*, qui est le double de A S C, transporté en S C *a*.

Fig. 7. Il est visible que puisque le triangle générateur A S C est composé de trois lignes, il peut produire dans sa révolution des cônes, dont l'axe, le côté, & la base varient infiniment en longueur, d'où résulte autant de variété de l'ouverture de l'angle du sommet du cône, comme on voit en AS*a* & A P *a*, dont l'un est aigu, & l'autre obtus, sans cesser d'être des cônes droits, parce que l'axe S C est toujours perpendiculaire sur la base A*a*.

Mais si l'axe du cône est incliné sur la *Fig.* 8. base, comme S C sur O B, on ne peut plus désigner la génération du cône par la révolution d'un triangle, mais par la trace d'une ligne droite, comme une regle S B, appuyée sur un point S immobile, le long duquel elle coule pour parcourir par le bout B la circonférence d'un cercle O P B L représenté ici en perspective; ensorte qu'elle excéde toujours le point S, en parcourant la moitié B L O, comme on voit en O N;

égale à SB, & s'abaiſſe au contraire, en parcourant l'autre moitié de O en B par R. Cette eſpece de cône s'appelle *ſcalene*, qui peut auſſi varier infiniment, ſuivant le plus ou le moins d'ouverture de l'angle OCS.

Les ſections planes de ces deux eſpeces de cônes ſont cependant toujours les mêmes dans les cônes droits & ſcalenes, ſuivant la poſition du plan coupant, à l'égard de l'axe & de la baſe, comme nous allons le démontrer le plus briévement qu'il nous ſera poſſible : car les courbes qui en réſultent ont tant de propriétés, qu'on en voit de grands & amples Traités, ſous le nom des *Sections coniques* : il nous ſuffit, pour en donner une notion générale, de dire qu'il y en a de cinq eſpeces.

La premiere, lorſque le plan coupant paſſe par l'axe, eſt toujours un triangle rectiligne ASB, iſoſcele dans les cônes droits, & *Fig.* 7, 9.
ſcalene dans les cônes ſcalenes OSB, ſi le *Fig.* 8, 10.
plan coupant paſſe par l'axe & par la perpendiculaire SP abaiſſée du ſommet ſur le plan de la baſe OB.

Toutes les ſections qui paſſent par le ſommet S, comme ESF, GSH ſont *Fig.* 9, 10.
auſſi des triangles, dont la baſe diminue d'autant plus qu'elle s'éloigne du centre C dans le rapport des cordes; enſorte qu'elle ſe réduit à un point, lorſque le plan ne fait

que toucher, & alors les deux côtés E S, S F ſe réduiſent en une ſeule ligne droite A S.

Nous n'avons rien à dire de la figure de cette premiere eſpece de ſection rectiligne triangulaire, dont il eſt amplement traité dans les Elémens de Géométrie.

La ſeconde ſituation du plan coupant, lorſqu'il eſt perpendiculaire à l'axe du cône *droit*, ou oblique à l'axe du ſcalene, mais parallele au plan de la baſe, produit toujours un *cercle* plus petit que celui de cette baſe dans le rapport de ſa diſtance au ſommet, où le cercle devient ſi petit qu'il ſe réduit à un point.

Il faut ſeulement obſerver que l'on peut appeller *droit ſur ſa baſe* un cône ſcalene, dont on prolongeroit le plus petit de ſes côtés S B (qui ſe trouve dans le triangle O S B qui paſſe par l'axe & par la perpendiculaire S P) juſqu'à l'égaler au plus grand, en faiſant S R égal à S O, ou dont on retrancheroit du plus grand SO une quantité IO égale à l'excès de S O ſur S B : alors la baſe de ce cône devient une ellipſe, comme nous le dirons ci-après, & toutes les ſections perpendiculaires à l'axe ſeront auſſi des ellipſes, comme nous allons le démontrer, & non pas des cercles, comme nous venons de le dire du cône droit régulier.

Fig. 10.

Nous n'avons auſſi rien à dire de cette

ſeconde ſection circulaire, par la même raiſon que les propriétés du cercle ſont expliquées & démontrées dans les Elémens de Géométrie.

La troiſieme des ſections coniques eſt appellée *ellipſe*, qui eſt un cercle alongé.

La quatrieme eſt appellée *parabole*, qu'on peut conſidérer auſſi comme une ellipſe infiniment alongée.

La cinquieme eſt une *hyperbole*, qu'on peut conſidérer comme une ellipſe renverſée du dedans au dehors : ce ſont ces trois courbes dont nous devons donner une idée, parce qu'on les rencontre très-ſouvent dans la coupe des pierres : mais pour parvenir à en faire connoître les propriétés, il faut en expliquer les moyens.

Des points & lignes imaginés dans les ſections coniques pour en montrer les propriétés.

Les courbures des lignes étant variables à l'infini, on n'a pu imaginer de meilleur moyen pour en chercher les propriétés, & en trouver autant de points que l'on veut pour les décrire, que d'en comparer de petites parties à deux lignes droites qui les coupent, dont les angles qu'elles font entr'elles ſont connus, ainſi que le rapport de leurs longueurs, auxquelles ſe terminent

les parties courbes, qui ſont ordinairement conſidérées comme les hypoténuſes d'un triangle rectangle, & quelquefois comme un côté oppoſé à un angle aigu ou obtus donné d'ouverture.

Les points remarquables dans ces courbes ſont les *centres* & les *foyers*, & ceux d'*attouchemens*. Les lignes ſont les *diametres*, les *axes*, les *ordonnées*, les *abſciſſes*, les *tangentes*, & les *ſoutangentes*. On en donnera les définitions dans l'explication de chacune de ces courbes.

§. *De la Section elliptique.*

Si un cône A S B droit ou ſcalene eſt coupé par un plan E L incliné à celui de ſa baſe A B, la figure qui provient de cette ſection eſt appellée *ellipſe*, repréſentée ici
Fig. 11. en perſpective par la courbe E H G L O *n*.

La ſection de ce plan, avec le triangle par l'axe, coupé perpendiculairement, eſt la ligne E L, qu'on appelle le *grand axe*, dont le milieu *m* eſt appellé le centre. Si l'on ſuppoſe dans le plan coupant une perpendiculaire P K ſur le milieu de ce grand axe E L, on l'appelle le *petit axe*, les autres perpendiculaires à ce grand axe, comme R *n*, *ro* ſont appellées *ordonnées*, les intervalles RL, *r*L de ces ordonnées à une des

extrêmités L de cet axe ſont appellées *abſciſſes*, du mot latin *abſcindere*, qui veut dire couper.

Il faut montrer la différence qu'il y a de cette ſection elliptique du cône avec la ſection circulaire, en comparant l'une & l'autre dans le même cône.

Soit A S B le triangle par l'axe d'un cône la ligne L E inclinée au diametre de la baſe B A, enſorte qu'étant prolongée elle puiſſe la rencontrer en X, laquelle L E ſoit la ſection d'un plan perpendiculaire à celui du triangle, par l'axe du cône A S B : ſoit dans le même, une ligne D F la ſection d'un plan parallele à celui de la baſe, qui eſt un cercle D O F G, dont le diametre D F coupe l'axe de l'ellipſe E L au point *r*; la ligne *ro*, qui eſt l'interſection de ces deux plans qui ſe croiſent, ſera perpendiculaire à celui du triangle par l'axe, & aux deux diametres E L, D F; par la même raiſon, ſi l'on ſuppoſe encore un plan parallele à la baſe A B, la ſection R I H *n* I ſera encore un cercle, & R *n* perpendiculaire aux diametres H I & E L. Cela ſuppoſé, on reconnoîtra que ces diametres des deux cercles croiſant l'axe de l'ellipſe, formeront des triangles ſemblables, L *r* F & L R I, & leurs oppoſés aux ſommets E R H & E *r* D; d'où l'on tire les analogies ſuivantes : *Fig. 11.*

$Lr : rF :: LR : RI$, & celle-ci
$Er : rD :: ER : RH$: donc en multipliant l'une par l'autre $Lr \times Er : rF \times rD :: LR \times ER : RI \times RH$.

Mais dans le demi-cercle DOF on a * $Dr \times rF = \overline{rO}^2$, & dans l'autre demi-cercle HnI, on a $RI \times RH = \overline{Rn}^2$ ** : donc $Lr \times rE : \overline{rO}^2 :: LR \times RE : \overline{Rn}^2$; ce qui eſt la propriété de l'ellipſe qui la diſtingue du cercle, ce que nous avons cherché.

COROLLAIRE.

D'où il ſuit que ſi l'on prend la diſtance
Fig. 11. ER égale à Lr, les ordonnées rO & Rn qui ſeront à diſtances égales des extrêmités de l'axe, ſeront auſſi égales entr'elles ; ce qui démontre l'erreur de ceux qui penſent que le contour de l'ellipſe, du côté du ſommet S, doit être plus ſerré que du côté de la baſe A, ainſi qu'*Albert Duret* le dit dans ſon Livre intitulé *Inſtitutiones Geometricæ*, *fol. Arnhemiæ* 1606.

Il y a pluſieurs autres propriétés dans l'ellipſe qu'il eſt néceſſaire de connoître pour la tracer méchaniquement & géométriquement : la plus remarquable eſt, qu'il y a dans ſon grand axe AB deux points,

* *Eucl.* Liv. 3, Prop. 35.
** *Eucl.* Liv. 6, Prop. 13.

F & *f*, qu'on appelle *foyers*, lesquels sont éloignés de l'extrêmité D du petit axe d'un intervalle D F ou D *f*, égal à la longueur A C du demi-axe; d'où il suit pour cette partie, que la somme des lignes tirées des deux foyers F D & D *f* est égale à la longueur totale de l'axe : cette propriété s'applique aussi à tous les autres points de la courbe, par exemple G, car F G & G *f* prises ensemble, sont égales au même axe A B. *Fig.* 12.

L'autre propriété de l'ellipse est, que si l'on tire dans une ellipse faite D H I G des lignes R P, *rp* paralleles, & qu'on les divise en deux également en *n* & *m*, la ligne D I qui passe par ces milieux, s'appelle un *diametre*, dont le milieu C est le centre de l'ellipse, & la ligne qui la croise en passant par le centre, comme H G, est encore un diametre, qu'on appelle *conjugué du précédent*, si cette ligne est parallele aux lignes R P, *rp*; une ligne N T parallele à H G, & passant par l'extrêmité I du premier diametre, est une *tangente* de l'ellipse en ce point. De toutes ces propriétés nous déduirons les pratiques dont on fera usage au second Livre pour décrire cette courbe, qui est sans contredit la plus usuelle dans la *coupe des pierres*. *Fig.* 13.

Obſervation ſur les ſections d'un cône creux d'épaiſſeur uniforme, coupé obliquement au plan de ſa baſe.

Il ſemble du premier abord, que ſi l'on coupe un cône creux d'une épaiſſeur, partout égale, les deux ſections elliptiques qui ſe font aux ſurfaces concaves en dedans, & convexes en dehors, par un plan qui le traverſe obliquement, devroient avoir leurs circonférences équidiſtantes & concentriques; mais il n'en eſt pas de même quand on les regarde avec des yeux géométriques, & même à la ſeule inſpection du corps coupé $ASBbsa$.

Fig. 14. Pour le démontrer ſans peine, ſoit cd l'axe d'une ellipſe, on aura l'angle $Scd > SAB$ & $Sdc < SBA$: tirés par le point s, CD parallele à cd, & gh parallele à AB, les lignes sh, sD, partant du point s, & tombant ſur SB, ſont d'autant plus grandes, qu'elles s'éloignent de la perpendiculaire; puiſqu'on a l'angle $CDS < shS$, l'on aura $SD > sh$ par le même principe $Cs < sg$; mais $sh = sg$: donc $Cs < sD$, ou $ce < fd$. C. Q. F. D.

USAGE.

Comme l'ellipſe eſt la courbe la plus ordinaire dans la coupe des pierres, & que les

les voûtes coniques, qu'on appelle *trompes*, sont des corps creux d'épaisseur uniforme, on aura occasion plusieurs fois de faire usage de cette observation.

De la Section parabolique.

Nous avons parlé des courbes qui résultent des sections d'un plan coupant le cône, ou parallélement à sa base, ou obliquement à cette même base, de maniere qu'il coupe les deux côtés du cône, ce qui nous a produit le cercle & l'ellipse, qui sont des courbes fermées, c'est-à-dire qui viennent à se réunir.

Nous allons examiner présentement ce plan coupant en situation parallele à un côté SB, ensorte qu'il ne coupe que son opposé AS; d'où il résulte que cette courbe, qu'on appelle *parabole*, demeure ouverte sans pouvoir se refermer, en quoi elle differe de l'ellipse, comme on va le voir en examinant ses propriétés.

Soit ASB le triangle par l'axe d'un cône coupé perpendiculairement au plan de ce triangle par un autre plan PRL, dont l'intersection est la ligne Px parallele à SB; il faut trouver le rapport des ordonnées or, xR à l'axe Px, avec les abscisses Po, Px. *Fig. 15.*

Soit un troisieme plan HI parallele à la

baſe AB, dont la ſection eſt un cercle HrI, & dont le diametre HI coupe au point o l'axe Px de la parabole, & ſon plan ſuivant une ligne ro, qui eſt une perpendiculaire commune à cet axe, & au diametre HI du cercle, comme dans la propoſition précédente à l'égard de l'ellipſe.

Par la propriété du cercle, on a $\overline{xR}^2 = Ax \times xB$ à la baſe, & $\overline{or}^2 = Ho \times oI$; mais $oI = xB$, à cauſe des paralleles ox, IB: donc $\overline{ro}^2 = Ho \times xB$; d'où l'on tire $\overline{Rx}^2 : \overline{ro}^2 :: Ax \times xB : Ho \times xB$: mais ces deux rectangles ayant la hauteur commune xB, ſont entr'eux comme Ax, Ho: donc $\overline{Rx}^2 : \overline{ro}^2 :: Ax : Ho$, & à cauſe des triangles ſemblables AxP, HoP, on aura $Ax : Ho :: Px : Po$. Donc les quarrés des ordonnées Rx & ro ſont entr'eux comme les abſciſſes Px & Po; ce qui eſt la propriété de la parabole qu'on cherche pour la diſtinguer de l'ellipſe.

USAGE.

La parabole eſt une courbe qui ſe préſente rarement dans la pratique de la coupe des pierres, excepté dans peu de cas, comme dans les ceintres de face des trompes ſur le coin.

De la Section hyperbolique.

Nous avons examiné les courbes qui résultent à la surface des cônes, lorsque le plan coupant est situé parallélement ou obliquement à celui de la base, & parallélement à un des côtés. Il nous reste à examiner celle qui résulte de la section faite par un plan parallele à l'axe, ou qui le rencontre hors du cône, qu'on appelle *hyperbole*, laquelle est comme la parabole, toujours ouverte, quand même elle seroit prolongé à l'infini.

Les propriétés de cette section ne peuvent être reconnues dans un seul cône, il faut en supposer un second, opposé au sommet, par la prolongation des côtés du premier qui se croisent à ce sommet.

Soit ASB le triangle par l'axe d'un cône, *Fig. 16.* dont les côtés AS & BS prolongés en F & G, forment un cône semblable FSG.

Soit aussi un plan HYP qui le coupe parallélement à l'axe SC du cône, & perpendiculairement au triangle par l'axe ASB, ensorte que la ligne xH soit la commune intersection de ces plans, elle sera aussi une partie de la section hyperbolique, tracée ici en perspective en YHP; si on la prolonge, elle rencontrera en I le côté du cône FSG, opposé au sommet du premier, &

la partie HI entre les deux cônes, s'appellera *le premier axe de l'hyperbole*, le point H son sommet, les lignes *ro* & Y*x* seront des *ordonnées* à cet axe, & les lignes HO & HX les *abscisses* de l'axe prolongé.

Soit aussi un autre plan D*n*E parallele à la base APB, dont la section dans le cône est un cercle qui coupe celui de l'hyperbole, suivant une ligne R*r*: il est visible, comme dans les sections précédentes, que les lignes d'intersection de ces deux plans circulaires YP, *r*R, avec le troisieme hyperbolique, seront perpendiculaires à la section IX de ce plan, avec celui du triangle, par l'axe du cône, laquelle est l'axe de l'hyperbole, & par conséquent à celle des diametres des cercles AB, DE; d'où il suit que leurs moitiés *o r*, XP ou YX sont des ordonnées communes à ces cercles, & à l'axe IH prolongé de l'hyperbole, qui est entre les deux cônes, hors de cette courbe, en quoi il differe de ceux de l'ellipse & de la parabole qui sont au dedans.

A cela près, les propriétés de l'hyperbole sont les mêmes renversées que dans l'ellipse, sçavoir, que les quarrés des ordonnées O*r*, IX sont entr'eux comme les rectangles des abscisses HO × IO, & HX × IX, comme nous allons le démontrer.

A cause des triangles semblables IOE,

IXB, on aura OE : XB :: IO : IX; & les triangles ſemblables HDO, HAX donneront DO : AX :: HO : HX, d'où l'on tire, par la multiplication, DO×EO : XA ×BX :: HO×IO : HX×IX; mais les cercles, par leur nature, fourniſſent $\overline{XY}^2 = AX \times BX$, & $\overline{Or}^2 = DO \times EO$: donc par ſubſtitution $\overline{Or}^2 : \overline{XY}^2 :: HO \times IO : XH \times IX$. C. Q. F. D.

USAGE.

Cette courbe ſe trouve rarement dans les *traits* de la coupe des pierres, on ne la reconnoît que dans quelques cas de *trompes* à pans & de rencontres d'arrieres vouſſures avec les pieds droits, &c.

Corollaire général des Sections des cônes.

Il ſuit de ce que nous avons dit des différentes poſitions des plans coupant les cônes.

1°. Que celles qui forment les ellipſes étant variables dans leur obliquité, à l'égard de la baſe, elles peuvent être infiniment alongées, ſuppoſant les côtés du cône infiniment prolongés, juſqu'à ce que ce plan devenant en ſituation parallele à un côté, la courbe ne peut plus rentrer en

elle-même & se fermer, alors elle devient parabole.

2. Que puisque la position de ce plan est déterminée pour former la parabole, toutes celles qui seront formées dans le cône plus près ou plus loin du côté du cône, auquel le plan coupant doit être parallele ; toutes ces courbes de section seront semblables, étant semblablement posées dans le cône.

3. Que depuis ce parallélisme jusqu'à ce que le plan coupant s'approche tellement du côté, qu'il se couche sur le cône, il peut former une infinité d'hyperboles différentes plus ou moins ouvertes.

REMARQUE.

Il est encore nécessaire d'observer qu'une section conique quelconque peut être adoptée à une infinité de cônes différens. Cette proposition est démontrée dans le premier tome de ma Stéréotomie, au 2e théorême du premier Livre.

Pour montrer que l'on peut appliquer à toutes sortes de voûtes coniques tel ceintre de face qu'on jugera à propos, avec telle position ou inclinaison de l'axe qu'on voudra, par exemple, faire une *trompe* de niveau ou en rampe, dont le ceintre de face soit elliptique, surhaussé ou surbaissé, & même si l'on vouloit parabolique ou hyperbolique.

CHAPITRE III.

Des Sections des Cylindres coupés par des plans.

On diſtingue les cylindres, comme les cônes, par la poſition de leurs axes ſur leurs baſes. Si l'axe eſt perpendiculaire au plan de la baſe, il s'appelle *droit*, s'il lui eſt oblique, on le nomme *ſcalene*.

La génération du cylindre *droit* eſt exprimée par la révolution d'un parallélogramme A B D X rectangle, tournant autour d'un de ſes côtés A X, qui en eſt *l'axe*. Les deux côtés B X & D A forment par cette révolution deux cercles égaux, qu'on appelle *baſes* indifféremment, mais plus particuliérement celui qui eſt en bas; & enfin la ligne B D trace dans l'air la ſurface ronde du cylindre concave en dedans, du côté de l'axe A X, & convexe en dehors, ce qu'on diſtingue, en terme de l'Art, par *tour creuſe* & *tour ronde*. *Fig.* 17.

La génération du cylindre ſcalene, qui ne peut s'exprimer de même par une révolution de parallélogramme, doit être conſidérée comme le mouvement d'une ligne droite, toujours parallélement à elle-même *Fig.* 18.

autour d'un cercle, au plan duquel elle est inclinée.

La section d'un cylindre coupé par un plan, ne peut varier que de trois manieres par les différentes positions de ce plan.

1°. S'il est parallele à l'axe du cylindre, la section sera toujours un parallélogramme plus ou moins large, ou étroit, selon qu'il s'approchera ou s'éloignera de l'axe dans le rapport des cordes du cercle de la base.

D'où il suit que le plus large de tous est celui qui passe par l'axe, & le plus étroit celui qui ne fait que toucher qui se réduit à une ligne.

2°. Si le plan coupant est parallele à la base, la section sera un cercle, ou une ellipse, si la base est elliptique, comme elle peut l'être, si l'on veut; on peut même la faire de toute autre courbe, mais alors on l'appellera *cylindroïde*, c'est-à-dire semblable à un cylindre.

3°. Si le plan coupant est incliné à l'axe ou à la base du cylindre *droit*, la section sera une ellipse.

Dans le cylindre scalene, cette position peut produire un cercle en certaine circonstance d'une section, appellée *sous-contraire*, qui est celle où un plan N T perpendiculaire au parallélogramme D E B A, fait

Fig. 18.

avec le côté AD un angle DNT égal à l'angle ABE que fait le plan de la base AB avec le côté BE; ce qui rend le diametre NT de la section égal à celui de la base AB; ce qui est visible, parce que les deux lignes AB, NT sont également inclinées entre les deux paralleles AD, BE, comme il est démontré dans les Elémens de Géométrie; donc les diametres étant égaux, les cercles le sont aussi: excepté ce cas, la section oblique est toujours une ellipse, qu'on peut considérer comme un cercle alongé, parce que toutes ses ordonnées sont égales à celles du cercle, seulement un peu plus écartées entr'elles proportionnellement, comme on va le démontrer.

Soit AB le diametre du cercle de la base, & AE le grand axe d'une ellipse A*d*E, qui est la section oblique d'un plan A*d*EL perpendiculaire au triangle, par l'axe AEB; par conséquent toutes les lignes tirées dans ces deux plans, perpendiculairement à leur intersection avec le triangle par l'axe, seront paralleles entr'elles par la 16e prop. du 11e Liv. d'*Euclide*, & égales aussi, parce qu'elles sont terminées par les côtés D*d*: 2.*e* du cylindre: donc toutes les ordonnées correspondantes du cercle à l'ellipse, sçavoir CD, *md*, N2, *n*2 sont égales. C. Q. F. 1°. D. *Fig. 19.*

Secondement elles sont écartées propor-

tionnellement à leur distance des abscisses dans le cercle : car AC : Cm :: AB : BE :: AN : An, puisque tous ces triangles sont semblables ; ce qu'il falloit secondement prouver : donc la section oblique d'un cylindre est une ellipse, qui peut être appellée un cercle *ralongé*, comme les ouvriers l'appellent, lorsqu'ils disent la *cerche* ralongée; car ce mot de cerche est une corruption de l'Italien *cerchio*, qui veut dire un cercle. Il est vrai que c'est suivant l'écriture, & non suivant la prononciation, qui est *tcherkio*.

D'où l'on doit conclure que la cylindrique est la même que la conique, parce que si l'on y fait attention, on reconnoîtra que les quarrés des ordonnées sont entr'eux comme les rectangles faits des abscisses l'une par l'autre, puisque les racines de ces rectangles sont proportionnelles à celles des rectangles faits des abscisses du cercle.

Cette remarque n'est pas inutile pour les gens qui ne sont pas un peu Géometres, qui s'imaginent communément que ces ellipses sont différentes ; comme nous l'avons montré par l'erreur d'*Albert Duret* *, fameux Peintre qui a écrit sur la Géométrie pratique.

* Voyez la Stéréotomie, tome 1, page 185.

Des Sections elliptiques, des cylindres creux & d'épaiſſeur uniforme.

On a vu ci-devant, dans l'examen des ſections des cônes creux, que les ellipſes formées par la ſection d'un plan oblique à la baſe du cône, aux ſurfaces & arêtes intérieures & extérieures, n'étoient ni *concentriques* ni *équidiſtantes*, & que l'axe commun aux cônes de ces deux ſurfaces ne paſſoit pas par leurs centres.

Il n'en eſt pas de même des ſections du cylindre creux : les deux ellipſes des ſurfaces concaves & convexes ſont concentriques, mais leurs contours ne ſont pas équidiſtans, non autant que dans le cône, où il y a de l'excentricité, mais dans leur diſtance entre les deux axes, qui eſt toujours inégale dans chaque quart d'ellipſe, excédant la juſte épaiſſeur, depuis le petit axe juſqu'au grand, où elle eſt auſſi la plus grande.

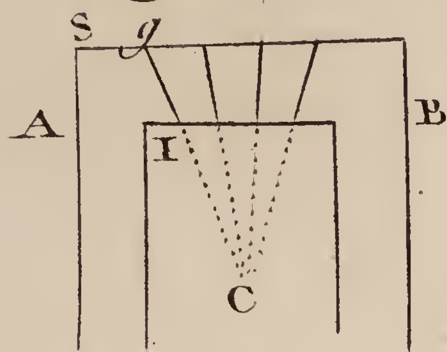
Soit un demi-cylindre creux ALEB, d'épaiſſeur uniforme, exprimé à la baſe par les deux cercles concentriques AHB, *a*I*b*, repréſentés ici en perſpective, ſur leſquels ſont élevées des perpendiculaires BE, *b*F, *a*D, juſqu'à la rencontre de l'axe AE de l'ellipſe ou ſection oblique ALE, repré- *Fig. 20.*

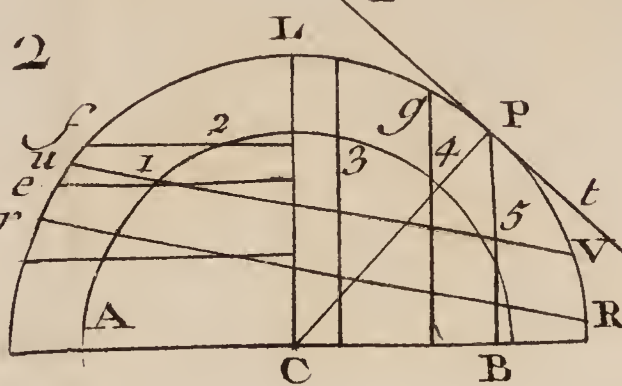
ſentée auſſi en perſpective. Il eſt évident, à cauſe des paralleles, dans le triangle AEB, que AB : AE :: Ab : AF :: FK : FE :: Aa : aD : donc FE excede l'épaiſſeur du cylindre bB, comme l'axe de l'ellipſe excede le diametre de la baſe du cylindre.

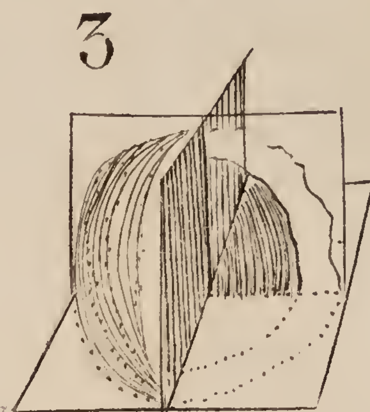
Si l'on ſuppoſe un plan coupant perpendiculaire à celui du triangle par l'axe AEB, la ſection LmCc ſera un parallélogramme LGno, dont les côtés oppoſés ſeront égaux, étant entre mêmes paralleles; par conſéquent l'épaiſſeur LG de la ſection oblique ſera égale à l'épaiſſeur on de la baſe égale (par la ſuppoſition) à bB = FK; mais FE eſt plus grand que FK, par conſéquent que LG. C. Q. F. D.

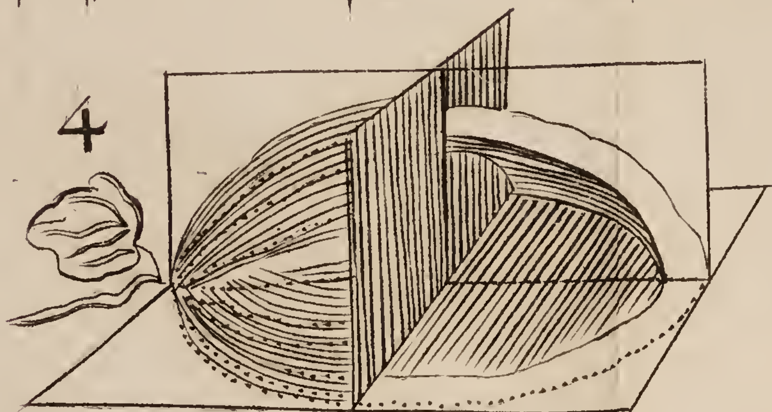
COROLLAIRE.

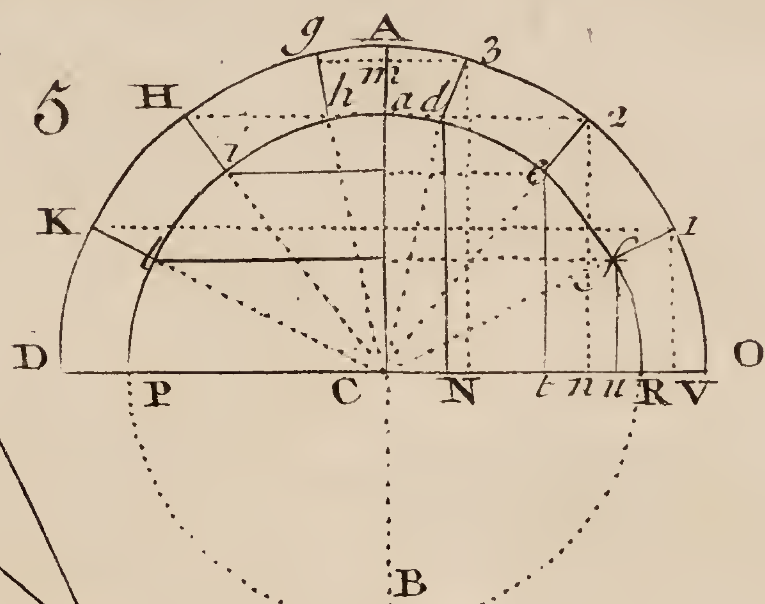
Il ſuit delà qu'ayant l'intervalle d'un point d'une ellipſe extérieure ou intérieure d'un côté du diametre, dans un quart d'ellipſe, on trouvera leurs diſtances oppoſées à peu près comme celles des aſymptotes des hyperboles; ce qui a fait que M. de la *Hire*, dans ſon grand Traité des Sections coniques, appelle ces ellipſes *compagnes* dont nous parlons, *aſymptotiques*, expreſſion dont je me ſervirai.

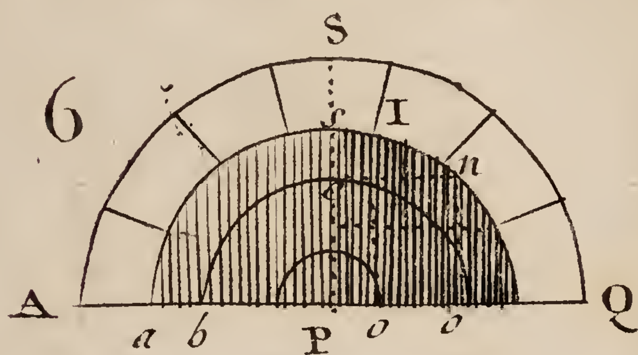

Fig. 1.re
S
g
A
B
I
C

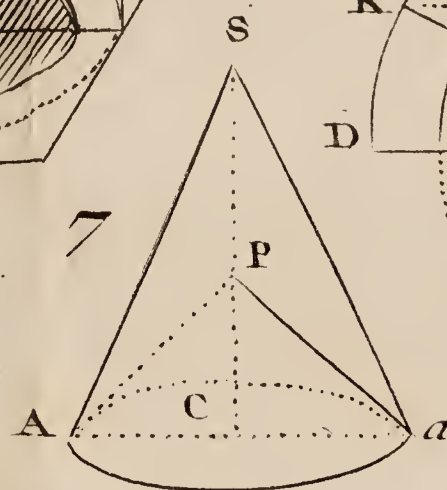

2
T
L
f
u
e
r
1
2
3
4
5
g
P
t
V
A
C
B
R

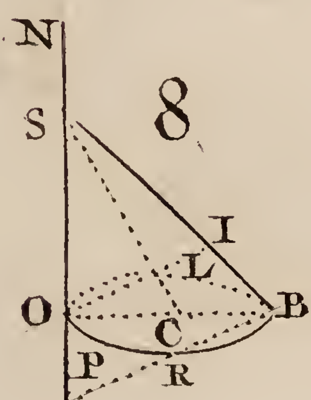

3

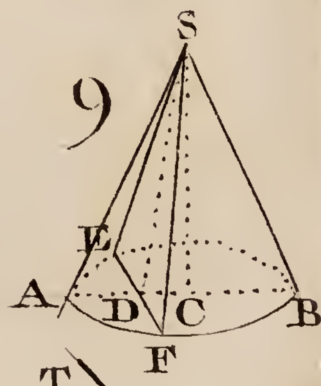

4

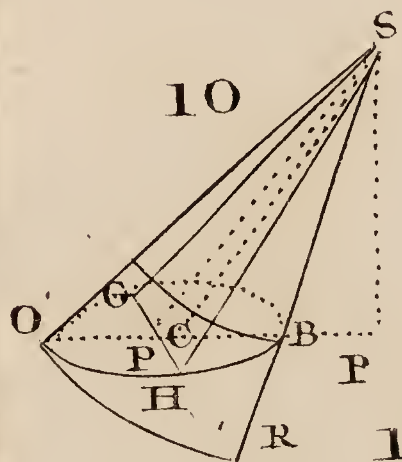

5
g
A
3
H
h
m
a
d
2
1
K
e
f
D
O
P
C
N
t
n
u
R
V
B

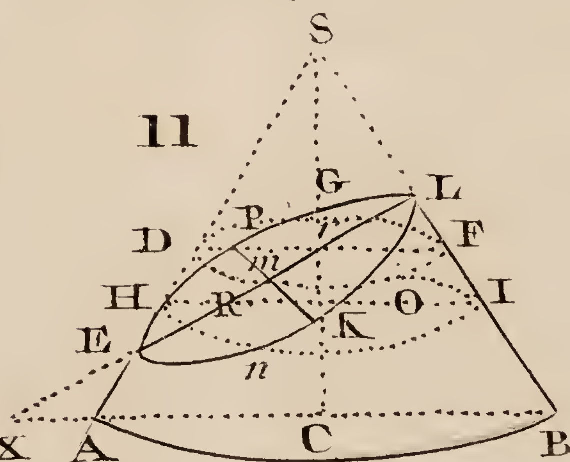

6
S
I
n
A
Q
a
b
P
o

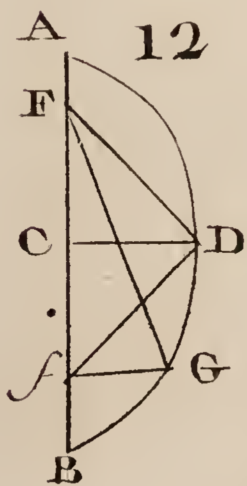

7
S
P
C
A
a

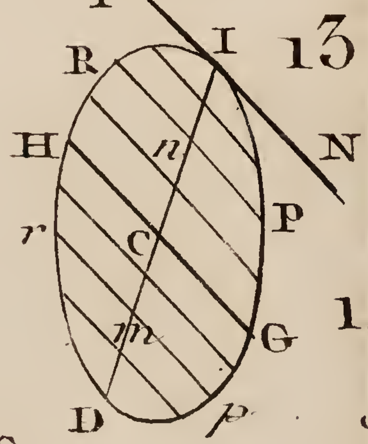

N
S
8
I
L
O
B
C
P
R

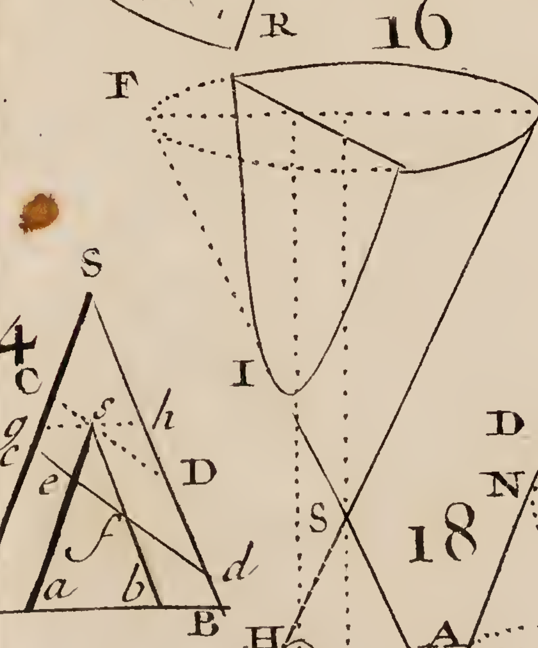

9
S
E
A
D
C
B
F

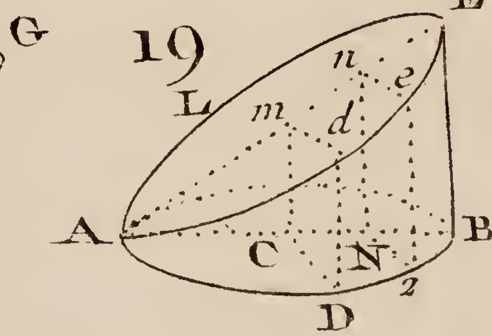

10
S
O
G
C
B
P
H
R

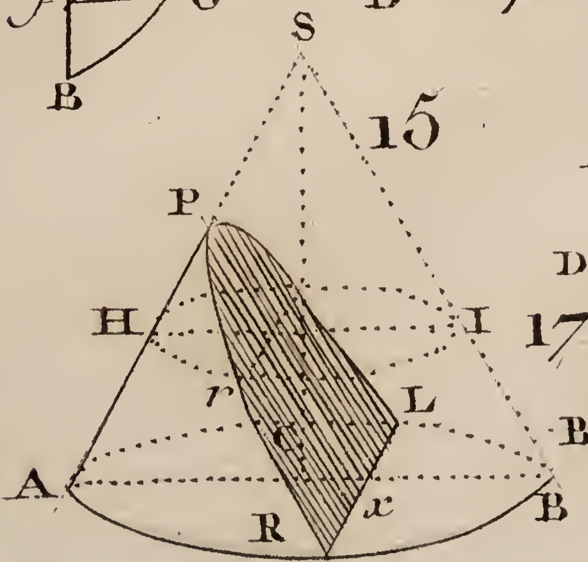

11
S
G
L
D
F
H
R
K
O
I
E
n
X
A
C
B

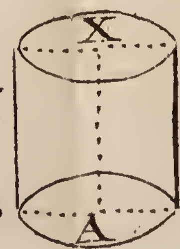

A
12
F
C
D
f
G
B

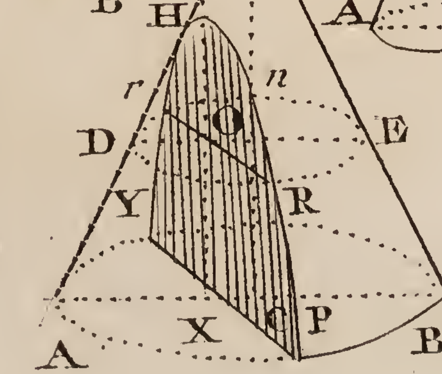

T
R
I
13
H
N
n
r
C
P
m
G
D
p

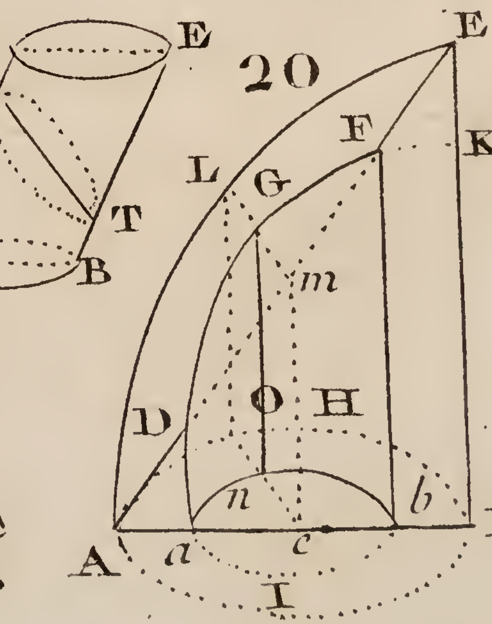

16
F
G
I
S
14
C
g
h
D
e
f
A
a
b
d
B


19
E
L
n
e
m
d
A
C
N
B
D


S
15
P
H
I
r
L
A
R
x
B


17
D
X
B
A


H
r
n
D
O
Y
R
E
A
X
P
B


D
E
N
18
T
A
B
20
E
F
K
L
G
m
D
O
H
n
b
a
c
I
A
B

Remarques de pratiques.

On voit par cette démonſtration, concernant les ellipſes aſymptotiques, que ceux qui font des ceintres elliptiques, ou plutôt en *anſe de panier*, par une imitation de différens arcs de cercles raſſemblés, ſuivant le plus fréquent uſage des Artiſans, & même des Architectes, dont le contour intérieur & l'extérieur ſont paralleles, ne peuvent embraſſer une épaiſſeur de voûte uniforme & égale partout; car la diſtance des grands axes entr'eux étant plus grande que celle des extrêmités des petits axes, ſi les arcs de cercles concentriques (par conſéquent toujours équidiſtans) ſont pris à la meſure de la juſte épaiſſeur, le ceintre extérieur ne pourra atteindre à celle du côté du grand axe, ſoit aux impoſtes de la voûte, ſi elle eſt ſurbaiſſée, ou à la clef, ſi elle eſt ſurmontée.

C'eſt faute de connoiſſance de cette théorie que le P. *Deran* & la *Rue* ſont tombés dans de grandes erreurs de *traits* de la *coupe des pierres*, lorſqu'il s'eſt agi de faire des voûtes ſphéroïdes & ellipſoïdes, comme je l'ai fait remarquer dans ma Stéréotomie, *tome* 2, *l.* 4, *ch.* 7.

Secondement, il ſuit que l'on ne peut faire deux contours d'ellipſes concentriques

paralleles entr'eux, comme pour un bandeau ou une archivolte, & que dans la pratique, lorsqu'on y est obligé, il faut tracer à la principale, une courbe en *épicicloïde*, par des attouchemens d'arcs de cercles, de rayons égaux à la largeur donnée, pour l'intervalle d'une courbe à l'autre.

CHAPITRE IV.

Des Sections planes de quelques corps ronds, réguliérement irréguliers.

SI l'on imagine qu'une ligne courbe quelconque fait une révolution autour d'un axe, d'une tangente, ou de quelqu'autre position donnée, il se formera autant de corps différens que l'on voudra prendre de courbes & de points, ou de lignes de révolutions : ainsi l'on peut dire que le nombre des différentes figures de corps est infini ; mais comme nous ne devons faire mention que de ceux qui peuvent convenir à la construction des voûtes, nous nous bornerons aux plus ordinaires & usuelles, sçavoir, 1°. aux *sphéroïdes*, 2°. aux *ellipsoïdes*, 3°. aux *conoïdes*, 4°. aux *cylindroïdes*, 5°. aux *annulaires*, 6°. aux *heliçoïdes*, 7°. aux *coin-conoïdes*, desquels nous allons examiner les générations & les sections planes de chacun en particulier.

§ I.

Des Sections des Sphéroïdes coupés par des plans.

Si l'on ſuppoſe qu'une demi-ellipſe ABx tourne autour de ſon grand axe Ax immobile, le corps formé en l'air par la trace de cette révolution, ſera un ſphéroïde *alongé* comme un œuf; & ſi elle tourne autour de ſon petit axe Bb, elle produira un ſphéroïde *applati* comme un oignon, dont la moitié ABx repréſente cette eſpece de voûte, qu'on appelle en terme de l'Art, *voûte en cul-de-four ſurbaiſſée* ABx (*fig.* 22) & BAb (*fig.* 21, *pl.* 2) ou (*pl.* 1, *fig.* 3 & *fig.* 4). *Fig.* 21.

1°. Si l'un ou l'autre de ces corps eſt coupé par des plans perpendiculaires à l'axe de révolution, qui eſt immobile, les ſections ſeront toujours des cercles de rayons inégaux, tels ſont or, or dans le ſphéroïde *alongé*, & er, er dans le ſphéroïde applati.

2°. Si ces corps ſont coupés par des plans paralleles à l'axe immobile, leurs ſections ſeront des ellipſes ſemblables à la génératrice, à laquelle elles ſeront *aſymptotiques* d'inégale grandeur, mais proportionnelles, comme SVou, dont le quart de la figure $ſu$ eſt circonſcrit à la corde $ſu$, parallele à la corde AB de l'ellipſe extérieure.

3°. Si ces corps ſont coupés par des plans inclinés aux axes, leurs ſections ſeront encore des ellipſes plus ou moins grandes, ſelon qu'elles ſeront plus ou moins inclinées au grand axe, & plus près ou plus loin du centre. Cette vérité eſt démontrée dans ma Stéréotomie au Liv. I, Théor. V, p. 34, Edit. de Strasbourg; les deux premieres n'ont pas beſoin de démonſtration, pour peu d'attention qu'on y donne.

USAGE.

Cette propoſition fait voir qu'une voûte en cul-de-four ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, a des joints de deux eſpeces, ceux des *lits* des rangs de vouſſoirs ſont toujours circulaires par la ſuppoſition de la génération du ſphéroïde, dont les points de la circonférence elliptique tournent horizontalement, & d'autres elliptiques, qui ſont les *joints de tête* ou *de doële*, montans, & tendant à un pole au ſommet du demi-axe de révolution, qui ſont dans leur étendue intérieure des ſections de plans inclinés aux axes.

§ II.

Des Ellipſoïdes coupés par des plans.

Nous diſtinguons les ellipſoïdes des ſphéroïdes, en ce que ceux-ci participent de la ſphere

ſphere dans leur génération, qui donne toujours des cercles par la révolution des points de leurs circonférences horizontales.

Les ellipſoïdes, au contraire, ne ſont formés par aucune révolution circulaire, mais ſuivant le contour d'une baſe elliptique qui s'approche & s'éloigne de ſon axe vertical; de ſorte que toutes les ſections planes poſſibles ſont toujours des ellipſes; ce qui rend une voûte de cette eſpece très-difficile dans l'exécution, & où tous les Auteurs des Traités de la coupe des pierres ſont tombés dans de grandes fautes de conſtruction: on l'appelle, en terme de l'Art, *voûte ſphérique ſurhauſſée ou ſurbaiſſée ſur un plan ovale.* Nous en avons donné une correcte au ſecond tome de la Stéréotomie (4e Part. page 400, *édit. de Strasbourg*).

§. III.

Des corps conoïdes coupés par des plans.

Si l'on ſuppoſe une des ſections coniques ouvertes, parabole ou hyperbole, tourner ſur ſon axe, il ſe formera par cette révolution un corps que nous appellons *conoïde.*

Il eſt évident, par cette génération, qui eſt la même que celle des ſphéroïdes, que les ſections planes perpendiculaires à cet axe ſeront des cercles; mais il n'eſt pas ſi

facile de concevoir, que celles qui ſont faites dans cette eſpece de ſphéroïde-conoïde, par des plans inclinés à cet axe, ſont des *ellipſes :* cependant on en peut voir la démonſtration au théor. 5 du premier Livre de ma Stéréotomie, à laquelle je crois pouvoir renvoyer le lecteur, parce que des voûtes de cette eſpece ne ſont du tout point ordinaires dans la conſtruction des édifices.

§. IV.

Des Cylindroïdes coupés par des plans.

Nous appellons cylindroïdes tout corps qui n'a pas pour baſe un cercle, ni une ellipſe, mais une courbe quelconque, ſur le plan de laquelle on ſuppoſe une perpendiculaire ſe mouvoir parallélement à elle-même, en parcourant le contour de cette courbe.

Il eſt évident que ſi le plan coupant eſt perpendiculaire à l'axe, ou parallele à la baſe ſi le cylindroïde eſt ſcalene, la ſection ſera ſemblable & égale à celle de la baſe, étant compriſe partout entre mêmes paralleles.

Il ſuit encore delà que ſi le plan eſt incliné à la baſe, la ſection ne ſera plus égale; mais elle ſera encore ſemblable au contour de la courbe de la baſe, quelle qu'elle puiſſe

être, si elle est plane, parce que les côtés du cylindroïde étant toujours paralleles entr'eux, couperont des parties proportionnelles de cette base; ce que nous avons démontré au théor. 3 du premier Livre de la Stéréotomie.

On trouvera une application de ce principe dans la pratique au 4e Livre.

§. V.

Des Cylindroïdes annulaires coupés par des plans.

Si l'on fait tourner un cercle autour d'une perpendiculaire à l'extrêmité de son diametre, laquelle est une tangente, il se formera, par cette révolution, la figure d'un *anneau fermé*, c'est-à-dire sans ouverture au milieu, dont cette *tangente* est l'*axe*, qui doit être dans le même plan que le cercle. Si la perpendiculaire AX n'est pas immédiatement à l'extrêmité du diametre DB, mais sur sa prolongation à une distance donnée, comme en X, l'anneau qui sera formé par cette révolution, s'appellera *ouvert* de l'intervalle FD, qui est le diametre de la révolution circulaire F *m* D du point D, lequel demi-cercle F *m* D est dans un plan perpendiculaire à l'axe AX, & par conséquent au plan du cercle générateur *Fig.* 23.

DEB, qui eſt dans le même plan que l'axe AX.

On peut ſuppoſer auſſi un autre mouvement que le circulaire autour de l'axe AX, par exemple, un elliptique faiſant mouvoir le centre C ſur une ellipſe PLC perpendiculaire au plan du cercle générateur, en dirigeant le diametre DB à cet axe, perpendiculairement aux tangentes de tous les points du contour de cette ellipſe.

Il nous ſuffit ici de conſidérer un demi-cercle DEB pour repréſenter le ceintre d'une voûte, & une moitié de révolution qui conclut pour la révolution entiere.

Lorſque l'anneau eſt preſque fermé, enſorte qu'il n'y ait au milieu que l'épaiſſeur d'un pilier, on appelle la voûte de cette figure, *voûte ſur le noyau* ; mais ſi l'ouverture eſt grande, on doit l'appeller *berceau tournant*; c'eſt ainſi que ſont faits la plûpart des *bas côtés des Egliſes*, autour du *chœur* arrondi en *abſide*, ſuivant l'ancien uſage des *baſiliques*.

Au lieu du cercle générateur DEB, on peut ſuppoſer une *ellipſe* ou *anſe de panier*, ſurmontée ou ſurbaiſſée, d'où il réſulte un anneau applati ou élevé au-delà du plein ceintre.

De quelque courbe que ſoit le ceintre générateur mobile, les ſections de ces an-

neaux, coupés par des plans verticaux, dirigés au centre de révolution, feront toujours des courbes planes, égales à celle du cercle, ellipfe, ou ovale génératrice; puifque c'eft de fon mouvement & pofition à l'égard de ce centre que réfulte la figure annulaire.

Mais fi le plan coupant eft fuppofé encore vertical & perpendiculaire à celui de la bafe de révolution, fuppofée horizontale, comme G H I K L, qui coupe le rayon X N de la bafe perpendiculairement en M, il fe formera par cette fection une courbe ondée G H I K L, qui fera plus ou moins abaiffée à fon milieu I, felon que le plan coupant G L I s'approchera ou s'éloignera du centre de révolution C; enforte que fi la fection horizontale, par exemple, R O n'atteint pas au milieu M de la circonférence moyenne, l'ovale O S R ne fera point pliée à fon fommet S: ainfi cette courbe devient fort différente de la précédente; cependant elle eft toujours de même nature, du 4e *ordre*, comme il eft démontré au premier Livre de ma Stéréotomie, théor. 6, page 37 de *l'édit. de Strasbourg*, où les curieux pourront en voir le calcul algébrique. Nous donnerons au fecond Livre une maniere très-facile de la décrire.

USAGE.

Les berceaux tournans qui ſont des voûtes annulaires, ſont très-communs, comme je l'ai dit, dans nos Egliſes : la ſection plane, dans la derniere circonſtance, l'eſt beaucoup moins; cependant elle s'y rencontre encore quelquefois, lorſqu'il ſe trouve au chevet un pan de mur de clocher ou de ſacriſtie, qui eſt droit, coupant la voûte du bas côté, ou une arcade plane, ouverte au fond pour la baie d'une chapelle, qu'on y pratique aſſez ſouvent.

§ VI.

Des corps heliçoïdes coupés par des plans.

Ce qu'on appelle ainſi en Géométrie, eſt nommé *vis* en architecture. Or une voûte en *vis* eſt un berceau *tournant & rampant*, ſi le vuide du milieu eſt un peu grand; & ſi ce milieu eſt plein d'un pilier ou noyau, qui ſert à porter la moitié intérieure du berceau, elle s'appelle *vis S. Giles*; cette figure peut être comparée à un rouleau de corde tournée en vis autour d'un bâton, & celle du berceau tournant & rampant à un *tire-bourre*, dont le milieu eſt vuide.

Les ſections de ces corps coupés par des plans dans les mêmes circonſtances que les

annulaires, n'en different en rien pour les propriétés intrinſeques, mais ſeulement en ce que les axes de ces courbes ſont, l'un horizontal, comme ON, l'autre rampant, c'eſt-à-dire incliné à l'horizon, comme OR, & que les ordonnées au premier, à angle droit, ſont obliques au diametre OR, mais toujours égales en longueur, & poſées proportionnellement dans le rapport des axes ON & OR. *Fig. 24.*

USAGE.

Les voûtes héliçoïdes ou en vis, ſont très-communes dans les anciens bâtimens ſur les eſcaliers : elles ſont plus rares dans l'architecture moderne, où l'on fait peu d'eſcaliers tournans voûtés, à cauſe de l'inégalité des largeurs de giron, qui ſont trop étroits au collet, & trop larges à la queue.

CHAPITRE V.

Des Sections planes du coin-conoïde.

IL eſt une ſorte de corps réguliérement irréguliers, dont on ne fait pas mention dans les Elémens de Géométrie, mais dont il eſt néceſſaire de connoître les propriétés applicables à la conſtruction de ces petites

voûtes, qu'on appelle *arriere-vouſſures*, qui ſont préciſément de la même figure, lorſqu'elles ſont *réglées & bombées*, dont voici la génération.

Soit un parallélogramme quelconque ABED, ſur un côté duquel AB eſt élevé à angle droit un demi-cercle, ou un arc de cercle moindre AHB; ſi l'on fait mouvoir une ligne droite HM, appuyée ſur cet arc par un bout H, & par l'autre ſur le côté DE en M, enſuite en RN perpendiculairement ſur une ligne ON parallele à BE, & ainſi de ſuite par tous les points de l'arc AHB, cette ligne parcourra en l'air un eſpace compris entre la ſurface plane du parallélogramme, & la ſurface courbe engendrée par la trace de la ligne droite inégalement penchée à l'égard de ce plan, leſquelles deux ſurfaces, avec celle du demi-cercle AHB, comprendront un eſpece de ſolide, comparable en partie à un coin, dont DE eſt le tranchant, & à un conoïde par un arrondiſſement qui participe de la nature du cône : c'eſt pourquoi je l'appelle un *coin-conoïde*.

Fig. 25.

§. Ce ſolide étant coupé par des plans différemment poſés, montrera dans ſes ſections des courbes auſſi fort différentes en contour & en eſpece.

1°. Si le plan coupant eſt perpendiculaire

au parallélogramme de la base, & parallele à un des côtés, il est évident que la *section* sera un *triangle*, comme C H M & O R N, dont le plus grand est celui qui passe par le centre C, & la ligne du milieu C M, que j'appelle l'axe, & les plus petits seront ceux qui approcheront des côtés A D & B E, où ils se réduiront enfin à une ligne droite, parce que leur hauteur sera déterminée par les ordonnées *or* du demi-cercle, qui diminuent à mesure qu'elles approchent du diametre AB, ensorte qu'elles sont réduites à des points en A & B.

2°. Si le plan coupant le coin-conoïde est parallele à la tête circulaire A H B, la section sera une ellipse.

Pour le démontrer, il nous suffira de tracer une moitié du coin, parce que l'autre lui étant parfaitement égale, on évitera la confusion des lignes dans la figure.

Soit cette moitié A H C M D coupée en L *e*, parallélement au quart de cercle de la tête du coin A H C, qu'on suppose perpendiculaire au plan de la base A C M D, quoiqu'il ne le paroisse pas dans la figure qui est représentée en perspective. Il faut démontrer que la courbe L *y x* est un quart d'ellipse, si la tête A R H est un quart de cercle. *Fig. 26.*

Ayant pris à volonté un point *o* sur le

rayon C A, on tirera de ce point une parallele au rayon C H, qui coupera l'arc de cercle A H au point R, & ſur le plan A M de la baſe une parallele O N au côté A D, qui coupera D M au point N, & L *e* au point *p*, duquel ſi on éleve une perpendiculaire *py*, elle coupera la ligne R N en *y*, comme *ex* coupera la ligne H M en *x*. Or, à cauſe des triangles ſemblables M C H, M*ex*, on aura M C : C H :: M*e* : *ex*, & à cauſe des triangles ſemblables NOR, N*py*, on aura N O : O R :: N*p* : *py*; mais M C = N O, & M*e* = N*p* : donc C H : *ex* :: O R : *py*; ce qui eſt une propriété de l'ellipſe, dont les ordonnées (comme nous l'avons démontré ci-devant) ſont entr'elles comme celles du cercle : donc la ſection du coin-conoïde, par un plan parallele à la tête du coin, eſt une *ellipſe* plus ou moins applatie, à meſure que le plan coupant approche de la ligne du tranchant D M, où le petit axe *ex* ſe réduit à un point en M. C. Q. F. D.

COROLLAIRE.

Si le contour de la tête étoit un arc moindre que le demi ou quart de cercle, la ſection elliptique ſeroit auſſi une moindre portion d'ellipſe.

2°. Si la courbe de la tête étoit elliptique,

les sections paralleles seroient encore des ellipses, dont les axes peuvent être différemment posés: par exemple, si le grand axe de la tête étoit perpendiculaire au diametre A C, il arriveroit qu'entre cette tête & le tranchant, il y auroit une section circulaire, lorsque C H deviendroit égal à C A, & ensuite les autres sections auroient leur grand axe, comme dans le cas précédent, dans le plan de la base. *Fig. 25.*

SECTION I.

Si l'on coupe le coin-conoïde par un plan perpendiculaire à celui de la base, mais incliné à l'égard du triangle par l'axe M C H, il en résulte différentes figures de courbes.

1°. Si le plan F*y*G qui coupe ce triangle obliquement, coupe les deux côtés opposés du parallélogramme de la base D A, B E, il se forme une courbe F*y*G inégalement enflée, à mesure qu'elle s'approche de la tête, ou du tranchant du coïn-conoïde; ce qu'il est facile de reconnoître, en supposant que les lignes O N & *on* soient également éloignées de l'axe C M; d'où il résulte que les ordonnées au cercle de la tête R O & *ro* sont aussi égales: par conséquent les sections triangulaires R O N, *ron* sont égales: donc N O : O R :: N*p* : *px*, & *Fig. 27.*

$no:or::nq:qz$; mais $NO=no$, $OR=or$: donc $Np:px::nq:qz$; mais Np eſt plus grand que nq, par la ſuppoſition de l'obliquité de la ſection par FG: donc px eſt plus grand que qz. C. Q. F. D: donc cette courbe n'eſt plus une ellipſe, puiſque les ordonnées, à même diſtance du centre, ou milieu m, ſont inégales.

2°. Si le plan coupant eſt ſi oblique, qu'il ne coupe pas les deux côtés paralleles AD, BE, mais ſeulement un, par exemple AD
Fig. 27. en K, & le tranchant DE en I, il eſt viſible que la ſection deviendra très-aiguë en I, & que ſuppoſant px, ordonnée commune à cette ſection & à la précédente, la partie de la ſection xI deviendra preſque en ligne droite, parce que l'ordonnée tu ſera plus petite que my, étant plus près du tranchant.

3°. Si le plan coupant ne paſſe par aucun des côtés, mais ſeulement par le tranchant
Fig. 27. DE & le diametre AB, comme oNr, la ſection ne ſera plus compriſe par deux lignes, une droite & une courbe, mais ſera un triangle mixte, dont les deux côtés No & or ſont rectilignes, & Nr courbe, qui ſe redreſſera d'autant plus, que la ſection approchera du parallélisme de l'axe, auquel cas la ſection redevient un triangle rectiligne.

SECTION II.

Si au lieu d'un plan perpendiculaire à celui de la baſe, toujours ſuppoſé, comme dans les ſections précédentes, *le coin-conoïde eſt coupé par un plan qui lui ſoit parallele*, il ſe formera une courbe, qui n'eſt ni circulaire ni elliptique, ni ſemblable à celle du cas précédent, dont on pourra trouver autant de points que l'on voudra par le calcul, ou avec la regle & le compas, en ſuppoſant autant de ſections triangulaires paralleles au triangle par l'axe, que l'on voudra avoir de points de la courbe demandée.

Soit le plan F G X celui qui coupe le coin-conoïde parallélement à ſa baſe A D M C, dont la diſtance à cette baſe eſt la hauteur G C, ſi l'on veut avoir, par exemple, quatre points de cette courbe. Il eſt déja évident qu'en tirant par le point G donné une parallele au diametre A C, elle coupera l'arc de tête A H au point F, qui eſt déja un de ces points. Secondement, ſi dans le triangle par l'axe C H M on tire auſſi une parallele à l'axe C M, elle coupera la ligne H M au point X, qui ſera un ſecond point de la courbe. *Fig. 28.*

Par le même moyen, ſi l'on tire à volonté des paralleles à l'axe, comme O N, *on*, & qu'on éleve ſur le plan de la baſe

des perpendiculaires OR, *or*, qui couperont l'arc AH aux points R & *r*, & qu'enfin on tire les lignes RN, *rn*, on aura des triangles, que la ligne GF coupera en *i* & *k*, par lesquels, si l'on mene les lignes *iy*, *kz* paralleles aux lignes ON, *on*, elles couperont les lignes RN, *rn* aux points *y* & *z*, qui seront des points de la courbe demandée F*yz*X. C. Q. F. F.

De cette pratique, avec la regle & le compas, on déduit facilement la maniere de trouver les mêmes points par le calcul; car toutes les sections triangulaires étant coupées par des lignes paralleles au plan de
Fig. 28. la base FGX, il s'y forme des triangles semblables, qui donneront les analogies suivantes.

1°. HC : CM :: HG : GX qui donne le point X de la courbe. 2°. OR : ON :: RK : KZ.

3°. *ro* : *on* :: *r*I : I*y*. On a donc quatre points, F, *y*, *z*, X au contour de cette courbe, & on en peut trouver de la même maniere autant que l'on voudra, & y faire passer une ligne courbe à vue, ou avec une regle pliante.

Nous n'avons représenté dans cette figure qu'une moitié du coin, parce qu'il est visible que l'autre moitié lui doit être parfaitement égale, soit que le parallélogramme

par l'axe de la baſe ſoit rectangle ou obliquangle.

COROLLAIRE.

De la diviſion du coin-conoïde en pluſieurs ſections triangulaires, on peut tirer la maniere de trouver toutes les différentes ſections planes qu'on y peut faire, ſoit par un plan parallele à celui de la baſe, comme dans le dernier exemple, ſoit qu'il lui ſoit perpendiculaire, comme dans le précédent, on trouvera toujours les longueurs des ordonnées à la courbe de la ſection, leſquelles ſeront les interſections des plans de la baſe, & des plans coupans en différentes ſituations avec les triangulaires.

Il y auroit beaucoup de choſes à dire ſur la figure des ſections comparées aux oppoſées qui ſe feroient en prolongation & rebrouſſement, ſi le coin-conoïde étoit double; enſorte que la tête, que nous n'avons ſuppoſé qu'un demi-cercle, fût un cercle entier; ou ſi l'on prolongeoit les côtés du parallélogramme par l'axe, & des ſections triangulaires, comme l'on fait, lorſqu'on repréſente deux cônes oppoſés au ſommet; ou enfin ſi la tête du conoïde, qu'on a ſuppoſé circulaire, étoit elliptique.

Les deux premiers cas n'étant que des curioſités inutiles à notre objet de la coupe

des pierres, ne méritent pas que nous nous y arrêtions. Quant au dernier, il ne change en rien la maniere de trouver les ſections des points des courbes paralleles à la tête, ou obliques à l'axe du coin-conoïde : comme nous l'avons dit ci-devant ; il arrive une ſection circulaire entre les elliptiques, dont le grand diametre eſt perpendiculaire au plan de la baſe, & celles où ce même diametre lui eſt parallele

USAGE.

Il n'eſt point de ſurface de corps réguliérement irrégulier plus commune dans les édifices que celle du coin-conoïde, parce que preſque toutes les petites voûtes, appellées *arriere-vouſſures réglées & bombées*, qui ſoutiennent la maſſe d'un mur, au deſſus du vuide d'une porte ou d'une fenêtre, en ſont une imitation, en ce que le linteau ou fermeture de chacune de ces baies étant en ligne droite horizontale d'une pierre, ou de pluſieurs en plate-bande ſur le *tableau* ; on bombe un peu le derriere de l'*ébraſement*, pour en faire une petite voûte, qui a plus de force qu'une plate-bande, pour être chargée d'un maſſif, & de cet arc intérieur on tire des lignes droites à la plate-bande, qui forment une ſurface concave ſemblable à la convexe d'un

d'un coin-conoïde, à moins que, ſans égard à la durée du bâtiment on veuille (comme en quelques Provinces) y ſubſtituer un linteau de bois, qui a, non ſeulement l'inconvénient de la pourriture qui le détruit, mais encore celui de s'affaiſſer par la charge qui le fait bomber en *contre-bas*, & fracturer le mur au deſſus.

Obſervation ſur les changemens ordinaires à cette arriere vouſſure.

Nous avons toujours ſuppoſé que la ſection par l'axe & le tranchant du coin étoit un parallélogramme : il arrive plus ordinairement qu'elle eſt un trapeze, lorſque l'intérieur de la porte ou fenêtre eſt ébraſée, enſorte que les pieds droits ne ſont pas paralleles, mais concourent en quelque point fort éloigné, plus ou moins, ſuivant le plus ou moins d'obliquité des pieds droits à l'égard de l'axe ou direction du milieu de la baie.

Cette différence ne cauſe aucun changement à celui des ſections triangulaires de la tête au tranchant, ſi ce n'eſt que les plans de ces triangles ne ſont pas paralleles entr'eux; mais la différence de leur diſtance à la tête du coin & à ſon tranchant, eſt facilement donnée, en diviſant le diametre

de l'arc de la tête, & la ligne du tranchant en un même nombre de parties égales, sans chercher hors de l'objet le point où ils doivent tous concourir : ainſi les obſervations faites ſur la nature des différentes ſections ſubſiſtent, à cette petite différence près.



SECONDE PARTIE.

Des ſections faites à la ſurface des corps ronds par la pénétration d'autres corps de même ou de différentes eſpeces.

LEs ſections planes, dont nous venons de parler, n'ayant jamais qu'une courbure, ſont toujours applicables à une ſurface plane, puiſqu'elles en ſont engendrées; mais les interſections de deux ſurfaces courbes qui ſe pénetrent mutuellement, ne ſont pas toujours auſſi ſimples: elles ſont auſſi quelquefois planes, & le plus ſouvent courbes d'une courbure compoſée de deux directions, l'une ſuivant un plan, l'autre ſuivant un autre qui le croiſe; de ſorte qu'on ne peut décrire, ni appliquer de telles courbes ſur une ſurface plane; & par cette raiſon, on les appelle *courbes à double courbure*, dont nous allons donner une idée conforme à celle des corps ſolides, par leurs trois dimenſions, longueur, largeur & profondeur.

DEFINITION I.

Soit un cercle ADBE, repréſenté ici Fig. 29.

en perſpective, du centre duquel C tombe une perpendiculaire CP d'une longueur donnée pour la plus grande diſtance du cercle à une courbe quelconque APB; ſi l'on tire des ordonnées au diametre AB de ce cercle, comme DE, FG, HI, qu'on abaiſſe de leurs extrêmités & milieux des paralleles à la ligne CP, *mo*, *nq*, & qu'enfin on tire par les points O, P, Q des lignes paralleles & égales aux ordonnées du cercle, comme *gf*, *ed*, *ih*.

La ligne courbe qui ſera menée par toutes ces extrêmités A*gei*B*hdf*A, ſera appellée un *cicloimbre*, c'eſt-à-dire une eſpece de cercle plié en *tuile creuſe*, qu'on appelle en latin *imbra*, par abréviation de *circulus imbricatus*.

La ligne courbe APB qui la traverſe par le milieu, s'appellera *l'axe courbe*, la ligne droite AB ſon *axe droit* ou *ſoutendant*, la ligne CP ſon *axe de profondeur*, les lignes droites qui ſeront tirées d'un point de la circonférence à ſon oppoſé, comme *gh*, *fi*, paſſant par l'axe de profondeur CP, s'appelleront des *diametres*.

Où l'on peut compter trois dimenſions, comme dans les ſolides, longueur AB, largeur *de*, hauteur CP.

DÉFINITION II.

Si au lieu du cercle ſoutendant ADBE on avoit ſuppoſé une ellipſe, la courbe de la circonférence auroit été appellée une *ellipſimbre*. *Fig. 30.*

Par la même raiſon, ſi on avoit ſuppoſé une parabole ou une hyperbole, on auroit pu appeller la courbe *parabolimbre*, *hyperbolimbre*. Je ſçais que ces noms ne ſont point uſités, mais il eſt permis d'inventer des noms à des choſes qui n'en ont point eu juſqu'à nous, pour éviter les périphraſes qu'on ſeroit obligé d'employer pour ſe faire entendre.

COROLLAIRE.

Il ſuit de ces définitions & de la génération du cicloimbre, que toutes les ordonnées à l'*axe courbe* ſont égales à leurs correſpondantes dans le cercle ſoutendant: car ſi l'on y fait attention, les ſections GF*fg*, ED*de*, IH*hi* ſont des parallélogrammes, par la ſuppoſition que les côtés G*g*, E*e*, I*i* ſont paralleles à l'axe de profondeur CP, & les lignes GF, *gf*, &c. paralleles entr'elles. *Fig. 29.*

2°. Que tous les diametres droits de la courbe, paſſans par l'axe de profondeur, ſont encore tous égaux à ceux du cercle

ſoutendant, auxquels ils ſont paralleles; la ſeule différence conſiſte en ce que dans le cercle ils ſont tous dans le même plan, & que ceux de notre courbe ſont tous à des diſtances différentes le long de la hauteur de l'axe de profondeur, par conſéquent hors de la ſurface courbe du cicloimbre, dans laquelle il n'y en a qu'un *ed*, que j'appelle l'*axe droit*, parce qu'il eſt perpendiculaire au plan de la ſection mixte ABPA par l'axe de profondeur, & par le diametre ſoutendant AB.

Si l'on ſuppoſe des plans paſſans par l'axe de profondeur, & inclinés au diametre AB, comme à la fig. 30, ils feront dans la ſurface courbe du cicloimbre des diametres courbes *g* P *h*, qui le ſeront d'autant moins, que le plan paſſant par l'axe de profondeur, approchera plus de la perpendiculaire au diametre AB.

3°. Que toutes ces propriétés ſont à peu près les mêmes, ſi au lieu d'un cercle ſoutendant, on ſuppoſe une ellipſe, avec cette ſeule différence, que les diametres droits par l'axe ſeront inégaux entr'eux, comme ils le ſont dans l'ellipſe ſoutendante de l'ellipſimbre.

COROLLAIRE.

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que l'axe

de profondeur étoit perpendiculaire au plan du cerçle ou de l'ellipſe ſoutendante. Si on le ſuppoſe oblique, la courbe ſera toujours de la même nature, la ſeule différence qu'il y aura, conſiſtera dans la différence du contour de l'axe courbe A P B, qui le ſera plus ou moins de B en P, que de A en P, & inégalement partagé en P, ce qui entraîne une pareille inégalité dans les diſtances des ordonnées entr'elles, & celles qui leur correſpondent dans le cercle ſoutendant, & qu'il n'eſt pas difficile de concevoir, par la ſeule inſpection de la figure, puiſque l'axe droit *ed* n'eſt pas au milieu de l'axe courbe A P B.

Pour ſe former une idée juſte & ſenſible de la ſurface courbe du cicloimbre & de l'ellipſimbre, il n'y a qu'à ſe repréſenter une *tranche* de Livre un peu épaiſſe, dreſſée & coupée quarrément, c'eſt-à-dire perpendiculairement aux feuilles, comme on le fait ſur la preſſe. Si l'on trace un cercle ſur la ſurface plane, qu'y a fait le couteau, traverſant cinq ou ſix cens feuilles, ou une ellipſe, & qu'après avoir retiré le Livre de dedans la preſſe, on renfonce le milieu de la tranche, comme on a coutume de faire, pour arrondir un peu le dos plus ou moins, comme l'on voudra, il en réſultera une ſurface concave à la tranche,

qui changera la trace du cercle plan, en un contour de courbe à double courbure, que nous appellons *cicloimbre* ou *ellipsimbre*, relativement au cercle ou à l'ellipse qui y avoit été tracée, pendant que la tranche étoit plane sur la presse.

On apperçoit sensiblement, par cet exemple, qu'il n'est arrivé aucun changement de longueur aux feuilles, qu'on peut considérer comme des ordonnées à l'axe courbe, qui l'étoient auparavant à l'axe ou diametre du cercle ou de l'ellipse plane, que celui d'une différente position les unes à l'égard des autres, plus reculées en approchant du milieu de la surface concave, suivant une progression qui dépend de la courbure de la surface du dos, qu'on rend plus ou moins convexe comme l'on veut.

Il est encore évident que quoique la nouvelle surface concave ait un plus grand contour, suivant son axe courbe A P B, le nombre des ordonnées, qui sont les épaisseurs des feuilles, n'ayant pas augmenté l'axe A B, soutendant, qui comprend toutes ces épaisseurs, ne s'est ni ralongé ni raccourci, mais bien la courbe A P B.

On verra dans la suite l'utilité de cette observation pour la pratique des traits de la coupe des pierres, par la rencontre des berceaux, & autres voûtes qui se croisent.

THÉOREME I.

La courbe qui réſulte de la rencontre des ſurfaces de deux ſpheres égales ou inégales entr'elles, qui ſe pénétrent mutuellement, eſt la circonférence d'un cercle.

On peut conſidérer ici différens cas de profondeur de pénétration.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par les deux centres C & *c* des ſpheres de différentes grandeurs, il les coupera en deux cercles majeurs, AFG & FEG, qui ſe croiſent aux points communs F & G de leur circonférence, leſquels ſont auſſi à la ſurface des deux ſpheres, puiſqu'ils ſont à leur interſection, & aux extrêmités du diametre d'un cercle mineur, qui eſt la corde commune aux deux cercles majeurs. Cette corde peut paſſer, ſuivant l'inégalité des ſpheres ou la profondeur de la pénétration, 1°. entre les deux centres, comme à la *fig.* 31, 2°. ou par un des centres, comme à la 32ᵉ, 3°. ou au dehors des deux centres, comme à la 33ᵉ : de quelque façon que ce ſoit, la démonſtration ſera la même. *Fig.* 31. *Fig.* 32. *Fig.* 33.

Ayant tiré par les centres C & *c* une ligne droite qui coupera la ligne FG en *x* au 1ᵉʳ & 3ᵉ cas, & en *c* au ſecond, on tirera des centres C & *c* des lignes *c*F, *c*G, CF, CG

aux points F & G d'interſection, qui ſeront des rayons de chacune des ſpheres, par conſéquent égaux entr'eux, & la corde FG commune aux deux cercles de la grande & de la petite ſphere, eſt coupée en deux également, & perpendiculairement par la ligne C c qui paſſe par leurs centres (*Eucl.* Liv. 3, Prop. 3). Si des mêmes centres C, c, & du point x, on tire des lignes droites CI, cI, xI à un point I de la ſection commune des deux ſpheres, deſſinée en perſpective, on aura CFc, CGc, CIc, égaux en tout, de même que les triangles CxF, CxG, CxI rectangles en x, qui ont le côté commun Cx, & les hypoténuſes égales, en ce qu'elles ſont les rayons de la ſphere : donc (par la 4[e] pr. du 11[e] Liv. d'*Eucl.*) les trois lignes Fx, Ix, Gx ſont dans un même plan, & les rayons d'un cercle FIG commun aux deux ſpheres : donc les points F, I, G ſont à la circonférence de leur interſection. C. Q. F. D.

La même démonſtration eſt plus ſimple dans la ſeconde figure, où les points x & c ſont confondus.

Application à l'uſage.

On connoît, par cette propoſition, que l'arête d'enfourchement d'une voûte ſphé-

rique, qui en rencontre une autre plus grande ou plus petite, eſt un cercle : telle eſt celle d'une niche en coquille, dont l'impoſte eſt de niveau à la naiſſance d'un dôme ſphérique, telle eſt encore l'impoſte d'une calotte renfoncée dans un dôme de même nature ou de différente, ſurhauſſée ou ſurbaiſſée, pourvu que leur axe ſoit commun.

SECTION.

De la pénétration des ſpheres par des cylindres.

Un cylindre qui pénetre une ſphere peut être conſidéré en deux différentes poſitions qui changent la courbe d'interſection des ſurfaces de ces deux corps, ſçavoir, 1°. lorſque l'axe d'un cylindre droit ſur ſa baſe paſſe par le centre de la ſphere.

2°. Lorſqu'il n'y paſſe pas, ou que le cylindre eſt *ſcalene.*

THÉORÊME II.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cylindre droit, dont l'axe paſſe par le centre de la ſphere, eſt un cercle.

La démonſtration en eſt très-ſemblable à celle du théorême précédent.

Fig. 34. Soit une demi-ſphere ADEB, & un cylindre HIED, dont l'axe XF prolongé paſſe par le centre C de la ſphere ; ſoit auſſi la courbe DGE la repréſentation en perſpective de celle de l'interſection des ſurfaces de ces deux corps différens, dans laquelle on a pris un point G à volonté, duquel on tirera d'un côté une ligne GC au centre de la ſphere, & une autre GF à l'interſection de l'axe XC, avec le diametre DE du cylindre.

Il a été démontré dans la propoſition précédente, que les lignes DF, GF, EF ſont dans un même plan & rayon d'un même cercle, les trois triangles DFC, GFC, EFC étant rectangles en F. Si l'on tire auſſi d'un point X de l'axe XF des lignes XD, XG, XE à la circonférence de la baſe du cylindre, ſuppoſé droit, on reconnoîtra par la même raiſon, que la ligne courbe DGE, qui eſt une ſection plane de la ſphere, eſt auſſi en même tems la baſe du cylindre : par conſéquent ce cercle eſt commun aux deux corps, & la circonférence eſt l'interſection de leurs ſurfaces. C. Q. F. D.

Application à l'uſage.

On voit par cette propoſition, que la baſe de la tour d'une lanterne, élevée au

milieu d'un dôme, comme on en voit dans presque toutes les Eglises d'Italie, est un cercle, parce que le milieu de cette tour tombe à plomb sur le centre du dôme.

Par la même raison, la rencontre d'une nef qui aboutit à un dôme, dont les impostes sont de niveau, & le milieu de la nef, dirigé à celui du dôme, est aussi un cercle, comme le montre la même figure, si l'on suppose XC en situation horizontale, au lieu de la verticale, sans rien changer à la figure; car alors la nef seroit représentée par la moitié de cylindre GEIHD: mais il n'en sera pas de même si l'un ou l'autre de ces corps est surhaussé ou surbaissé dans son ceintre, comme nous allons le démontrer.

THÉORÊME III.

La section faite par la rencontre des surfaces d'une sphere & d'un cylindre scalene, dont l'axe passe par le centre de la sphere, est une ellipsimbre.

Soit une demi-sphere ADEB, pénétrée par un cylindre scalene FGNM, dont l'axe XC passe par le centre C de la sphere. *Fig. 35.*

Si l'on suppose un plan passant par cet axe, il fera deux sections différentes, sçavoir, un parallélogramme obliquangle FGNM dans le cylindre, & un demi-

cercle majeur A D E B dans la ſphere, leſquelles ſe coupent aux points D & E, qui ſont par conſéquent communs aux deux ſurfaces de ces corps, & les ſeuls de cette ſection; car ſi l'on en prend d'autres au deſſus ou au deſſous des points D & E, ils ſeront au dehors ou au dedans de la ſphere, ſi c'eſt ſur le cylindre; au dehors ou au dedans du cylindre, ſi c'eſt ſur le contour du demi-cercle de la ſphere; ce qui eſt viſible.

Si l'on ſuppoſe un ſecond plan, qui coupe perpendiculairement le parallélogramme *Fig. 35.* G M par l'axe X C en D E, il fera deux ſections encore différentes, ſçavoir, un cercle dans la ſphere, qui a pour diametre D E, interſection des deux plans, & une ellipſe dans le cylindre, dont la même D E eſt le petit axe, parce que la ſection perpendiculaire à l'axe d'un cylindre ſcalene eſt toujours une ellipſe, comme nous l'avons dit ci-devant: car la *ſous-contraire*, qui eſt un cercle, eſt encore inclinée à l'axe autant que la baſe dans le ſens oppoſé.

D'où il ſuit que puiſque les deux ſections planes dans la ſphere & dans le cylindre ſont des différentes circonférences, aucune des deux ne peut être commune aux deux ſurfaces. L'ellipſe du cylindre ſera circonſcrite au cercle de la ſphere, parce que ce

diametre D E eſt plus petit que F G de la baſe du cylindre, lequel eſt égal à O P, autre diametre de la même baſe, circulaire par la ſuppoſition, lequel eſt repréſenté en raccourci de perſpective, égal à ſon parallele q Q: donc q Q eſt plus grand que D E: donc les points q & Q ſont hors de la ſphere.

Donc la ligne d'interſection des deux ſurfaces courbes ne ſera pas dans le plan DqEQ, avec lequel elle n'aura de commun que les deux points oppoſés D & E: ce ſera donc une ligne courbe à double courbure, ſçavoir, en circonférence autour de l'axe, & en inégalité de hauteur, au deſſus ou au deſſous de la ſection plane par D E; dans notre figure, elle paſſe au deſſous en D x E, ou, pour parler plus généralement, plus près du cercle majeur, parallele à D E, qui eſt A R B S, repréſenté en perſpective par une ellipſe; parce que le point Q étant hors de la ſphere dans la ſection plane par D E, le côté parallele à l'axe du cylindre deſcendra au deſſous, juſqu'à ce que la corde de l'arc d'une ſection par l'axe ou parallele ſoit égale au diametre O P du cylindre, comme on le voit par le profil de la fig. 36, où le diametre S T de la ſection plane de la ſphere eſt plus petit que q Q du parallélogramme par l'axe du cylindre O P Q q.

Il faut montrer présentement le rapport que cette courbe solide, ou à *double courbure*, aura avec l'ellipse de la section plane, faite par le diametre DE, perpendiculairement à l'axe XC; & pour y parvenir d'une maniere sensible, il faut une seconde préparation de figure, parce que la premiere n'a servi qu'à trouver deux points communs de la courbe cherchée avec la plane, sçavoir D & E, qui sont ceux de leur attouchement. Outre les deux plans imaginés passer l'un par l'axe XC, l'autre par le diametre DE, perpendiculairement entr'eux, il faut encore en supposer deux autres OQ, *oq* perpendiculaires au premier qui passe par l'axe en DFXC pour découvrir par de nouvelles intersections de la sphere & du cylindre, d'autres points de la circonférence commune à la rencontre des deux surfaces de ces corps, lesquels deux plans en fourniront quatre, sçavoir, deux d'un côté & deux de l'autre, du plan passant par DFXC, marqués *x* & *y*, & ensuite tant qu'on en voudra chercher par le même moyen.

Fig. 36.

Cette multiplicité de plans imaginés & représentés en perspective dans la même figure, y causent nécessairement un peu de confusion embarrassante, parce qu'il faut relever par la pensée, ce que les yeux ne font

ſont appercevoir qu'à plat en raccourci ; ce qui nous oblige de ne repréſenter ces ſections que dans un quart de la ſphere ASKI, & une moitié du cylindre OFPNL*f*.

Ayant ſuppoſé, comme nous l'avons fait en premier lieu, un plan paſſant par l'axe de la ſphere XC, & le point D d'interſection commune, on en ſuppoſera deux autres qui lui ſeront perpendiculaires & paralleles à l'axe ; ils feront chacun deux ſections différentes, ſçavoir, un parallélogramme *oVur*, & OPNL dans le cylindre, & deux cercles, ou ſeulement demi-cercles *pst* & ISK dans la ſphere, qui ſe croiſent, l'un au point *x*, l'autre au point *y*, où ſont les points communs à ces deux figures de parallélogrammes & de cercles : donc on a trois points trouvés à la circonférence de la courbe d'interſection des deux ſurfaces cylindriques & ſphériques pour ſa moitié, ſuppoſant l'autre égale, comme elle le doit être, hors de la figure.

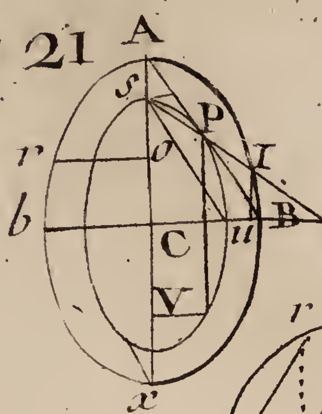
§. Préſentement ſi par les points *x* & *y* on tire des perpendiculaires *xm*, *y*M au plan paſſant par l'axe & le point D, ce ſeront des ordonnées à l'axe courbe D*m*M, qui ſeront viſiblement égales à celles de la baſe ou ſection du cylindre FPO, qui doit être une ellipſe, ſuivant notre ſuppoſition que le cylindre eſt ſcalene, parce que ces

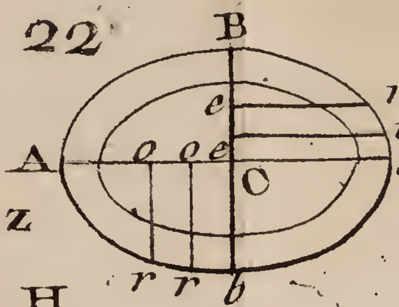
ordonnées ſont paralleles entr'elles, & terminées par les côtés du cylindre *o r*, O I, qui ſont auſſi paralleles entr'eux. Or cette ellipſe étant parallele à celle qui paſſe par le point D dans la ſphere, lui eſt égale : donc toutes les ordonnées à l'axe courbe, dont la moitié eſt ici D *m* M, ſont égales à celles de la ſection plane par D E de la précédente figure : donc la ſection courbe, dont un côté de la demi-circonférence eſt D *x y* eſt une *ellipſimbre*, ſuivant notre définition, dont la moitié de l'axe ſoutendant eſt D M, celle de l'axe droit *y m*, & celle de l'axe courbe D *m* M. C. Q. F. D.

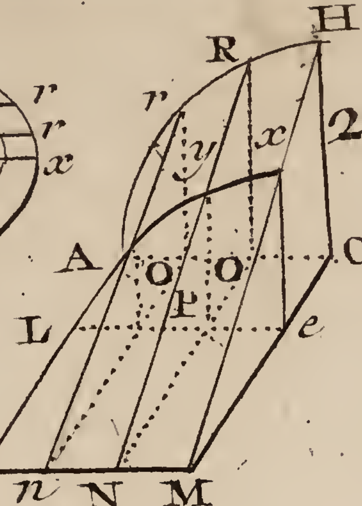
Nous donnerons au ſecond Livre la maniere de trouver autant de points de cette courbe que l'on voudra.

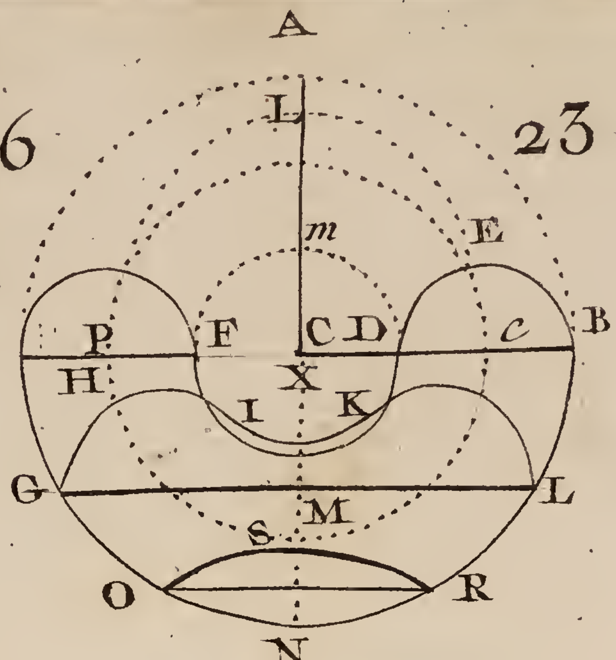
USAGE.

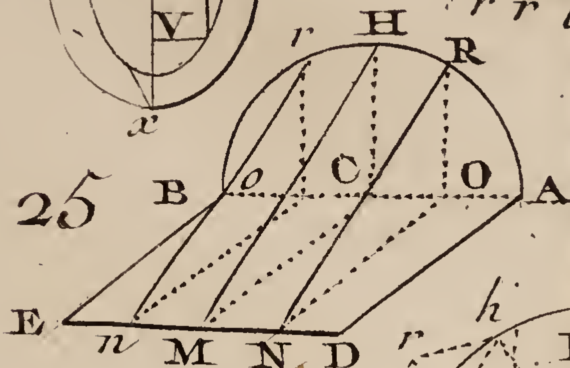
Cette propoſition fait voir que ſi une nef d'Egliſe voûtée en berceau ſurbaiſſé ou ſurmonté, rencontre un dôme ſphérique, dont l'impoſte ou naiſſance eſt de niveau avec celle du berceau, l'arête de rencontre des doëles de ces voûtes ne ſera pas une courbe plane qu'on puiſſe bornoyer d'un côté à l'autre, mais à double courbure ; d'où il réſultera que l'arc doubleau qu'on voudroit faire en direction droite d'un côté de la naiſſance de l'enfourche-

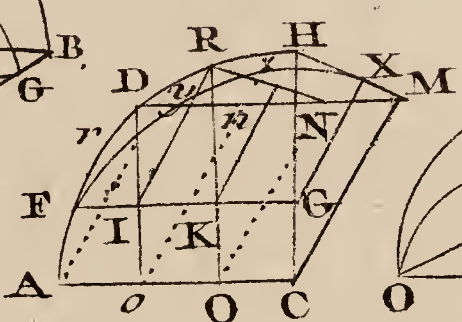

Fig 21
A
s
P
r
o
I
b
B
Z
u
C
V
x

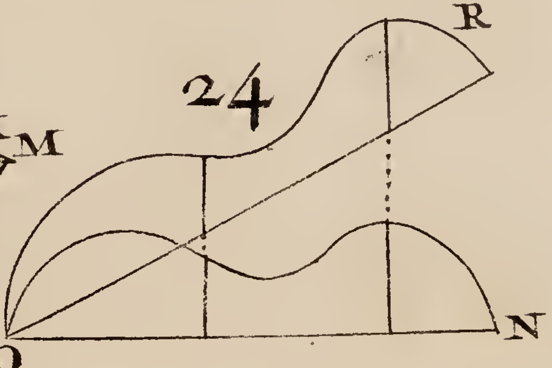

22
B
A
e
o
C
r
x
b


H
R
r
y
x
26
A
O
C
P
L
e
D
n
N
M

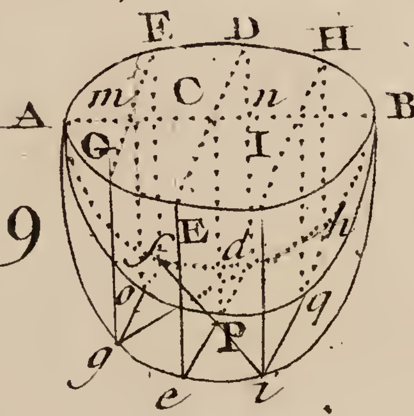

A
L
23
m
E
P
F
C
D
c
B
H
X
I
K
G
M
S
O
R
N

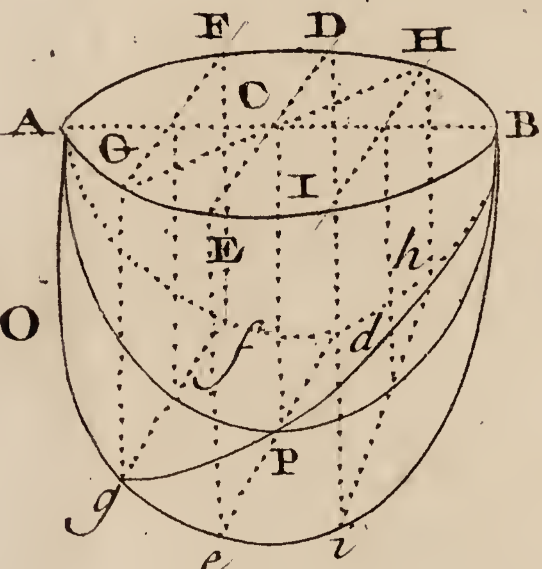

r
H
R
o
C
O
B
A
25
E
n
M
N
D

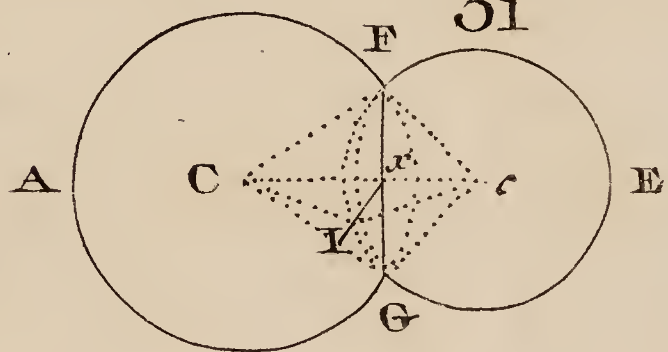

28
R
H
D
y
x
X
M
r
n
N
F
G
I
K
A
o
O
C

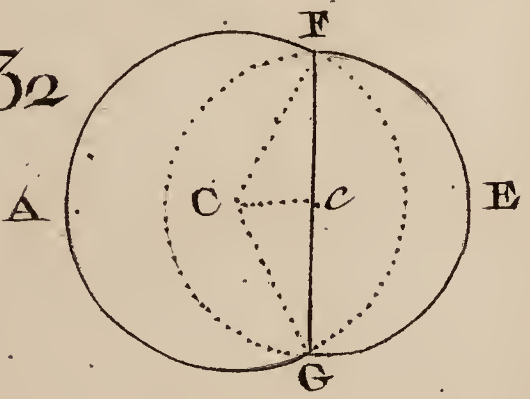

R
24
O
N

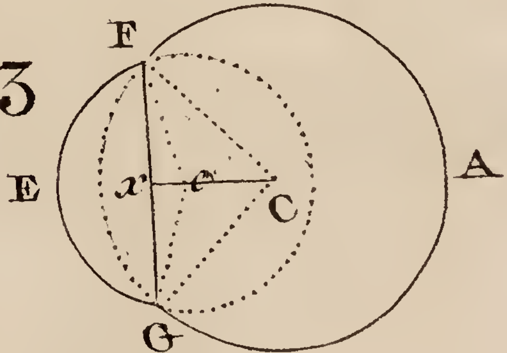

h
H
r
R
y
x
o
27
K
A
C
O
B
G
F
q
m
p
X
t
u
I
D
n
M
N
E

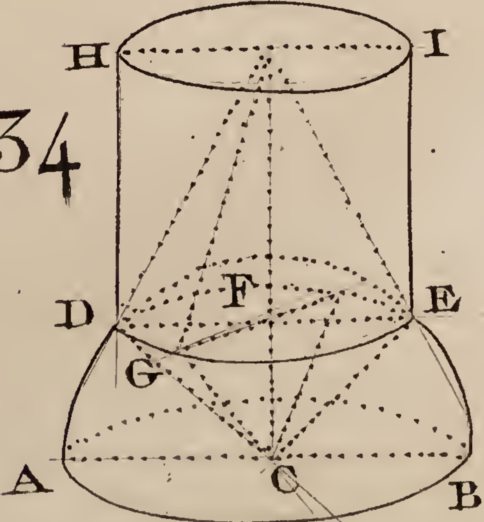

F
D
H
A
m
C
n
B
G
I
29
E
d
h
f
o
q
g
P
e
i

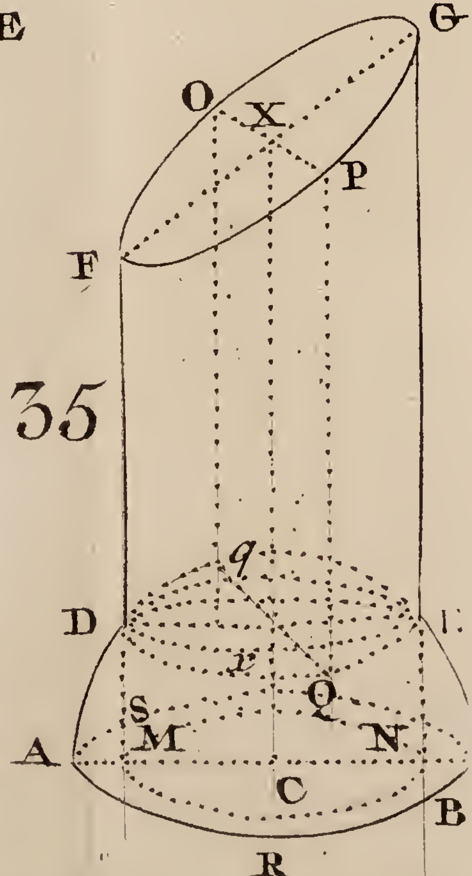

F
D
H
A
C
B
G
I
E
h
30
f
d
P
g
e
i

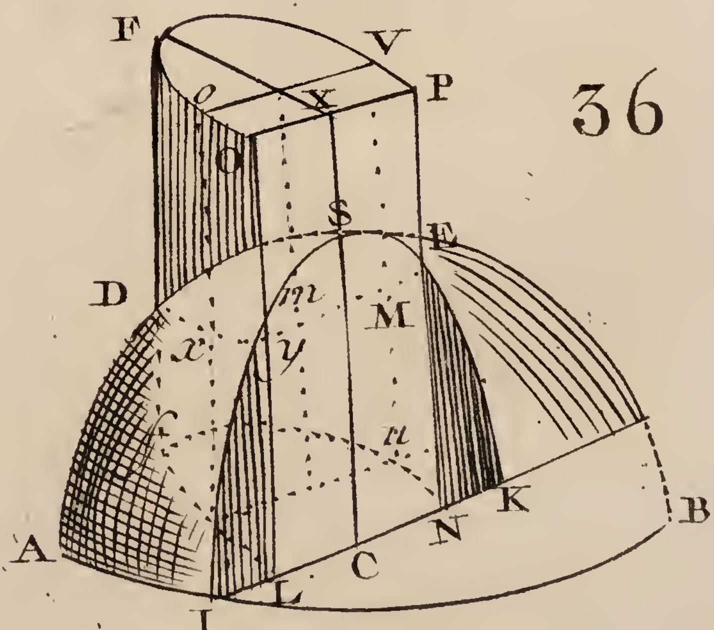

31
F
A
C
x
c
E
I
G


32
F
A
C
c
E
G


F
33
E
x
e
C
A
G


X
H
I
34
D
F
E
G
A
C
B


G
O
X
P
F
35
q
D
I
x
Q
S
M
N
A
C
B
R


F
V
o
X
P
36
O
S
E
D
m
M
x
y
u
A
K
N
C
L
I
B

ment à l'autre, comme l'on en feroit entre deux pilaſtres oppoſés, ne pourroit ſuivre le contour de l'arête de rencontre des deux doëles, mais ſeroit tout entier dans celle de la nef, laiſſant encore au-delà de l'arc doubleau une ſaillie, en façon de lunette courbe, avançant vers la clef, ſuivant le rapport des diametres de la ſphere & du cylindre entr'eux ; ce qui ſeroit déſagréable à la vue.

THÉORÊME IV.

De la ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'une ſphere & d'un cylindre droit ou ſcalene qui ſe pénetrent, de maniere que l'axe du cylindre ne paſſe pas le centre de la ſphere & une ellipſimbre complete, lorſqu'il la pénetre de toute ſa circonférence.

Et d'une ellipſimbre compoſée de deux parties incompletes, ſi le cylindre n'entre qu'en partie de ſa circonférence dans la ſphere.

§. Soit une demi-ſphere A L B pénétrée par un cylindre D F G H : donc l'axe X N ne paſſe pas par le centre C de la ſphere. Fig. 37.

Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par cet axe, & par le centre C de la ſphere, il fera deux ſections différentes dans ces deux corps, ſçavoir un parallélogramme DFGH dans le cylindre, & un cercle A L B dans

la ſphere, qui ſe croiſeront en E & L, ou ſeront par conſéquent des points communs à l'une & l'autre de ces deux ſurfaces.

Si l'on tire par ces points une ligne E L, elle ſera le diametre commun du cercle que formera dans la ſphere un plan perpendiculaire à celui du paraſſélogramme par l'axe du cylindre, & le grand axe de l'ellipſe qu'il formeroit à la ſurface du cylindre par une ſection oblique, inſcrite dans la circulaire : par conſéquent aucune des deux ſections ne peut être commune aux deux ſurfaces; d'où il ſuit que la courbe de leur rencontre ou interſection eſt à double courbure, touchant ſeulement la plane aux deux points communs E, L, & point d'autres.

Il ſera facile de reconnoître que cette courbe eſt une ellipſimbre, par la démonſtration de la propoſition précédente : car ſuppoſant de même un plan paſſant par l'axe X N du cylindre, perpendiculairement au premier DFGH, & d'autres plans paralleles en auſſi grand nombre qu'on voudra, qui couperont le grand axe E L de l'ellipſe plane, faite par la ſection oblique du cylindre, ils formeront des parallélogrammes dans ce cylindre, qui termineront par leurs côtés paralleles les ordonnées de l'ellipſe plane, comme I K, &

celles de la courbe à double courbure, comme yY.

Il faut seulement remarquer que dans le cas présent, l'axe de profondeur de la courbe à double courbure ; qui est mT, n'est pas perpendiculaire à celui de l'ellipse E L ; d'où il résulte que l'axe courbe E T L n'est pas divisé exactement par l'axe droit transversal yY, & par conséquent que les ordonnées à cet axe courbe, qui sont essentiellement égales en nombre à celles qui sont de part & d'autre de cet axe droit transversal yY, n'y sont pas également serrées, puisque la partie E T est plus petite que T L ; ce qui semble du premier abord un paradoxe, mais qui devient cependant sensible dans l'exemple que nous avons donné du cylindre formé par le dos d'un Livre, étant évident qu'il n'y a pas plus de feuillets dans une moitié que dans l'autre, soit qu'il soit coupé perpendiculairement au côté, ou obliquement, & que la ligne de la section oblique soit plus longue que la perpendiculaire au côté.

Application à l'usage.

Cette proposition sert à faire connoître quelle est la courbe de l'arête d'enfourchement, c'est-à-dire de la rencontre des sur-

faces d'une voûte ſphérique, & de ces lunettes cylindriques qui donnent paſſage à la lumiere des fenêtres ou vîtraux qui les éclairent, lorſque la naiſſance de leur ceintre n'eſt pas de niveau avec celle de la voûte ſphérique, parce qu'alors l'axe du cylindre ne paſſe pas par le centre de la ſphere. Ce cas ne donne l'exemple que d'un demi-cylindre, lorſque les pieds droits de vîtraux ſont à plomb; mais il y en a d'autres, en architecture, qu'on appelle des *yeux de bœuf*, où le cylindre eſt entier, comme on en voit aux quatre dômes de l'Egliſe de S. Pierre de Rome, qui cantonnent, c'eſt-à-dire accompagnent le grand de quatre côtés, où les vîtraux inclinés en abat-jour ſont à la baſe d'un cylindre entier, dont l'axe ne paſſe point par le centre du dôme.

La ſeconde partie de cette propoſition qui concerne le cas *où le cylindre n'entre dans la ſphere que d'une partie de ſa circonférence*, ſe déduit facilement de la premiere, en ce qu'elle fait deux ſections d'ellipſimbres inclinées entr'elles, leſquelles conſidérées comme une ſeule, ont été appellées une ellipſimbre compoſée.

Fig. 38. Soit A B D une demi-ſphere qu'un cylindre E G F traverſe ſeulement d'une partie de ſa circonférence, par exemple Y K L.

le reste YGL passant hors de la sphere.

Si du centre C de cette sphere on tire une perpendiculaire CG à l'axe du cylindre Xx, & que du point Y ou L, où la circonférence du cylindre rencontre celle de la sphere, on abaisse sur GC une perpendiculaire YP : cette ligne sera une ordonnée commune au demi-diametre AC d'un cercle majeur de la sphere, & de celui du cylindre coupé, perpendiculairement à son axe Xx, qu'on a représenté ici dans le même plan, quoique, suivant les regles de la projection, il ne devroit être représenté que par la ligne GK, & l'arc AYB par le rayon AC; ce qui ne fait aucun changement à la réalité, & qui sert à montrer que le point P représente les deux points Y & L communs aux deux surfaces, qui sont par conséquent à la circonférence de la courbe composée, & au pli de l'angle rentrant, ou de l'angle saillant, que les deux parties de cette courbe font entr'elles.

Pour connoître si elles se rencontrent en angle rentrant ou saillant, il faut examiner quelle est la profondeur de la pénétration du cylindre dans la sphere : si l'axe Xx passe au dedans du point A dans la sphere, l'angle curviligne sera saillant, comme la clef d'une voûte en tiers point YSL; si au contraire l'axe est au dehors, l'angle de ren- *Fig. 39.*

contre ſera rentrant, comme le curviligne YTL.

La préparation à la démonſtration conſiſte à chercher les axes ſoutendans de ces portions d'ellipſimbre, qui ſe croiſent en Y & L. Or ces deux points étant repréſentés, comme nous l'avons dit par le ſeul point P, qui eſt la projection ſur le parallélogramme EFIH par l'axe du cylindre, nous avons deux points de chacune des courbes à double courbure d'interſection des ſurfaces, ſçavoir, pour l'une H & P en projection, & pour l'autre I & le même P. Ainſi ſi l'on tire par ce point les lignes HQ, IQ, elles feront les grands axes des ſections elliptiques que feroit dans le cylindre un plan perpendiculaire au parallélogramme par l'axe, & paſſant par les points communs donnés H, P, & I, P, c'eſt-à-dire l'un par HYQ, l'autre par ILQ, leſquels deux plans s'entrecouperont ſuivant la ligne droite YL, qui eſt une double ordonnée commune au deux cercles du cylindre, & de la ſphere.

Ces connoiſſances préſuppoſées, il eſt aiſé de reconnoître que la courbe à double courbure de chacune des ſections incompletes eſt une ellipſimbre : par conſéquent que la voûte eſt une ellipſimbre compoſée de deux parties égales entr'elles.

Application à l'uſage.

Le cas arrive rarement dans l'architecture, que l'on y rencontre des ellipſimbres composées de deux parties, mais ſeulement d'une : telle eſt la rencontre de la ſurface convexe d'une tour ronde qui entre dans une voûte ſphérique, ou d'une tour ronde, dans laquelle ſont des enfoncemens en niche, terminés par le haut en quart de ſphere, comme ſont les trois du Val-de-Grace, au deſſus du baldaquin ; ou encore d'une voûte ſphérique, établie ſur quatre poſitions *d'arcs de cloître*, qui rachete un berceau ; mais quoiqu'il ſoit poſſible d'avoir à faire une ellipſimbre compoſée de deux parties, qui font un angle curviligne rentrant, il eſt viſible qu'on ne pourroit en faire une en angle ſaillant, qui pouſſeroit au vuide à la clef de part & d'autre.

De la rencontre des ſurfaces des ſpheres avec les cônes qui les pénetrent.

Comme l'objet de cet Ouvrage n'eſt que de fournir un abrégé des principes à ceux qui veulent étudier l'art de la coupe des pierres, nous ne devons pas nous arrêter ſur des cas de voûtes, qui arrivent très-rarement dans la pratique, comme ceux des

rencontres des voûtes coniques avec les ſphériques, les cylindriques & d'autres coniques plus ou moins grandes : les curieux d'une plus ample inſtruction trouveront à ſe ſatisfaire dans le chap. 6 de notre Stéréotomie.

Nous nous bornerons à faire remarquer que les courbes qui ſe forment aux arêtes de rencontre des différentes ſurfaces des corps qui ſe pénetrent dans ce genre de figures coniques, ne ſont plus des courbes à double courbure, dérivées du cercle ni de l'ellipſe, qui ont des ordonnées à l'axe courbe, égales à celles des figures planes, mais dont les ordonnées à l'axe courbe, augmentent ou diminuent dans un rapport connu, en plus grand ou plus petit, ſelon la différence de leur éloignement de la ſection plane, circulaire ou elliptique, ou encore en quelques cas paraboliques ou hyperboliques ; ce qui doit les faire appeller ellipſoïdimbre, paraboloïdimbre, &c. pour ſignifier qu'elles ont quelque reſſemblance avec les ellipſimbres, &c : c'eſt ainſi qu'on appelle ſphéroïde ou conoïde, un corps qui n'eſt exactement ni ſphérique, ni conique, mais qui y reſſemble beaucoup. Cette terminaiſon vient d'un mot Grec, qui ſignifie ſemblable.

Les ſections du cône & de la ſphere qui

ſe pénetrent, peuvent être quelquefois planes, comme lorſque l'axe d'un cône *droit* paſſe par le centre C de la ſphere D E G F : alors il ſe fait à l'interſection de leurs ſurfaces deux cercles inégaux, ſçavoir, un petit vers le ſommet du cône, & un plus grand vers la baſe ; ce qui n'a pas beſoin de démonſtration, parce que la ſection perpendiculaire à l'axe du cône eſt toujours un *cercle*. Or celle-ci eſt toujours perpendiculaire, parce que la corde D E ou F G eſt toujours coupée par le milieu par l'axe X*s*, & cette même corde eſt le diametre d'un cercle, formé par la ſection d'un plan perpendiculaire au triangle par l'axe A S B : donc ce cercle eſt commun à la ſphere & au cône paſſant par les points communs à ces deux corps en D & E, ou F & G : mais comme les côtés du cône s'écartent, F G eſt plus grand que D E. *Fig.* 40.

C'eſt de cet écartement que vient la différence des courbes à double courbure des interſections des ſurfaces de ces corps, ſitués différemment l'un à l'égard de l'autre : car ſi le cône eſt ſcalene, lors même que ſon axe paſſe (comme dans le cas précédent) par le centre de la ſphere C, les ſections planes, faites par les points communs *d* & *e*, ne ſont plus des cercles communs aux deux corps, à moins que les ſec- *Fig.* 41.

tions *f g*, *de* ne fuſſent *ſous-contraires* à la baſe L N : car dans toute autre ſituation de ſection, la ligne *f g*, par exemple, qui eſt le diametre d'un cercle coupé par un plan dans la ſphere, eſt le petit axe d'une ellipſe dans le cône, dont la moitié du grand axe eſt *m* P, parallele à L N ou L X, rayon du cercle de la baſe du cône ſcalene, qui doit être perpendiculaire au plan L S N par l'axe du cône.

Si l'on porte donc la longueur *m* P en *mp*, perpendiculairement à *f g*, qui eſt dans le même plan, la demi-ellipſe *fpg* exprimera la ſection plane de la moitié du cône, & le demi cercle *frg* celle de la ſphere, par le même diametre, & perpendiculairement au même plan : donc l'interſection des ſurfaces ne peut être ni cercle, ni ellipſe, puiſque l'ellipſe ſort du cône de *r* en *p*, & le cercle eſt au dedans en *frg*.

Pour connoître de combien l'ellipſe s'écarte de la ſphere à ſon grand axe, il n'y a qu'à porter *mp* en *m* M, & tirer M*s* au ſommet du cône, dont elle repréſentera le côté projetté dans l'élévation ſur X*s*, & l'on verra que ce côté ne rencontre la circonférence du cercle majeur de la ſphere qu'au point *y*, qui eſt un de ceux de la courbe à double courbure, à un de ſes points de ſection; d'où tirant une perpendiculaire *yz* à

l'axe, on aura pour la projection de la demi-courbe d'interſection la ligne *fzg*.

C'eſt de cet écartement que viennent auſſi les différences des courbes à double courbure des interſections des cônes, avec d'autres corps, ſpheres, ou cylindres, parce qu'elles s'écartent plus ou moins, ſuivant l'ouverture de l'angle du cône, au lieu que les côtés du cylindre étant paralleles à l'axe, il n'importe que la pénétration ſe faſſe plus près ou plus loin de la baſe; d'où il réſulte que les ordonnées à l'axe courbe ſont égales à celle de l'ellipſe ſoutendante, mais qu'aux pénétrations du cône, ces ordonnées excedent celles de l'ellipſe, à meſure qu'elles s'éloignent du ſommet, ou ſont moindres que celles de l'ellipſe ou du cercle ſoutendant, ſi elles s'approchent de ce ſommet; ce qui conſtitue une différence de nom d'ellipſimbre & d'ellipſoïdimbre, &c; ce qu'on déterminera au Livre ſuivant, lorſqu'il s'agira de la deſcription des courbes de ces eſpeces ſur des ſurfaces concaves ou convexes.

Il eſt facile de conclure quelle ſera la courbe d'interſection des ſurfaces du cône & de la ſphere, lorſque l'axe du premier ne paſſe pas par le centre de la ſphere, en conſidérant que la ligne DE n'étant pas parallele à la baſe AB, ſera le grand diametre *Fig.* 42.

d'une ſection plane dans le cône, & celui d'un cercle dans la ſphere; ce qui montre que ni l'une ni l'autre ne peut être commune, mais un ellipſoïdimbre, à moins que le cône ne fût ſcalene, & le diametre D E ſous-contraire à celui de la baſe : alors la ſection commune ſera un cercle.

Application à la pratique.

Cette propoſition fait connoître l'eſpece de la courbe à double courbure d'une lunette ébraſée dans une voûte ſphérique, parce qu'une lunette ébraſée eſt un cône tronqué ou un demi-cône, qui peut avoir ſa naiſſance de niveau à la voûte ſphérique, dont l'axe ſoit dirigé au centre, ce qui eſt le premier cas, ou de biais, ce qui eſt le ſecond, ou dont la lunette eſt ſurmontée ou ſurbaiſſée; ce qui eſt le cas du cône ſcalene.



CHAPITRE I.

Des Sections faites par la pénétration des cylindres entr'eux, & avec les cônes.

THÉORÊME I.

Si deux cylindres égaux ou inégaux, dont les axes ſont paralleles, ſe pénetrent mutuellement, plus ou moins intimement, leur ſection ſera un parallélogramme.

On peut faire ſentir cette vérité, en expoſant ſeulement aux yeux l'interſection des cercles de leurs baſes AFBG & DFEG qui ſe coupent aux points F & G communs au grand & au petit cercle, enſorte que la corde F G eſt commune aux différens arcs qu'elle retranche de chacun de ces cercles, ſçavoir F B G dans le grand, & F D G dans le petit. Si l'on ſuppoſe un plan parallele aux axes paſſer par cette corde, il eſt clair qu'il fera un parallélogramme dans l'un & dans l'autre, qui leur eſt commun, comme la corde qui en fait un des côtés; ce qui eſt évident. *Fig.* 43.

USAGE.

Cette propoſition fait voir que les berceaux gothiques DFB, appellés à *tiers point*, *Fig.* 44.

parce qu'ils ſont compoſés ordinairement de deux arcs D F, B F, qui ſont de 60 degrés, par conſéquent le tiers d'un cercle, doivent être alignés au milieu de leur clef en ligne droite, qui paſſe par le ſommet des angles curvilignes rentrans de chaque vouſſoir; de ſorte que pour peu qu'elle ſoit courbe, on doit conclure que les doëles ſont irrégulieres d'un côté ou de l'autre.

Par la même raiſon, les arêtes ou angles ſaillans des portions de cylindres raſſemblées en ſituation verticale, doivent auſſi être en ligne droite, comme on en trouve dans l'ancienne architecture du Temple de la *Galluce* à Rome, & dans la moderne à l'Egliſe de la *Sapience*, du deſſein de *Borromini*.

THÉORÊME II.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres égaux ou inégaux, dont les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement, & dont les baſes ont un diametre égal & ſemblablement poſé, eſt une ellipſe.

Si l'un des cylindres eſt droit, & l'autre ſcalene, ou tous les deux ſcalenes, elle peut être un cercle.

Soient deux cylindres inégaux A B E D, E F G D, dont l'un, ſçavoir le dernier, eſt droit, ayant ſa demi-baſe G K G circulaire, ce

ce qu'on appelle en plein ceintre, & l'autre en demi-ellipſe A*h*B, dont C*h* eſt la moitié du petit axe égale au rayon IK. Je dis que l'interſection de leurs ſurfaces en DHE eſt une *ellipſe plane.*

Il eſt évident, par la nature du cylindre, que ſi l'on ſuppoſe un plan qui coupe par l'axe C*c*, perpendiculairement à AB le cylindre ABED, la ſection qu'il fera ſera un parallélogramme repréſenté ici à moitié par M*c*C*m*, dont les côtés M*c*, *m*C ſont égaux à *ch* égal (par la ſuppoſition) au rayon IK = CH, parce qu'une pareille ſection dans le cylindre EFGD fera un parallélogramme, dont la moitié eſt repréſentée ici par CIGL, lequel étant relevé par la penſée, perpendiculairement à FG, on reconnoîtra que CL, C*m*, & CH ſe confondront en une ſeule ligne : donc les ordonnées du cercle FKG ſeront égales au milieu, au demi-petit axe de la courbe d'interſection DHE, & à la moitié du grand ou petit axe *ch* de l'ellipſe AHB, ſçavoir du petit axe, ſi AB eſt plus grand que FG, & du grand axe ſi AB eſt plus petit que FG.

§. On démontrera de la même maniere que ſi l'on ſuppoſe deux autres plans coupant les deux cylindres, parallélement à leurs axes, & perpendiculairement à leurs diametres AB, FG

par les lignes OR, *or*, les ordonnées *rn* du cercle, *o*R de l'ellipſe ſurbaiſſée DHE & R*n* de la ſurmontée AHB ſont égales entr'elles. Or toutes les ordonnées CH, OR, &c. étant perpendiculaires à ce même plan ADG, ſont auſſi entr'elles dans le même plan DHE, dont la baſe eſt une ligne droite, DE : donc la courbe d'interſection des ſurfaces de deux cylindres égaux ou inégaux qui ſe croiſent ou ſe rencontrent ſuivant un angle quelconque, eſt une ellipſe plane, puiſque toutes les ordonnées à ſon grand axe DE, ſont égales à celles du cercle FKG, & en raiſon de leurs diſtances des centres C*o* & I*o*, C*o* & C*r*. C. Q. F. D.

Il eſt évident que cette démonſtration ſert également pour les cylindres qui ſe croiſent, comme en AB, *cd*, puiſque ce n'eſt qu'une prolongation de la figure précédente, qui n'occaſionne aucun changement, que l'augmentation d'une nouvelle ellipſe de rencontre *gi* égale à *ef*, qu'elle croiſe dans les mêmes circonſtances à l'égard des parties de cylindre prolongées en B & *e*.

Fig. 46.

Quant à la ſeconde partie de l'énoncé du théorême, concernant les cylindres ſcalenes, il eſt démontré que leur baſe étant circulaire, peut être égale à une ſection ſous-contraire, & par conſéquent à celle

d'un cylindre *droit* de même diametre. Or des figures planes égales peuvent s'adapter à des cylindres inégaux, & devenir leur mutuelle rencontre, ſuivant des angles de direction donnés en certaines circonſtances.

Application à l'uſage.

Cette propoſition eſt ſans contredit une des plus néceſſaires pour la connoiſſance des courbes qui ſe forment à la rencontre des berceaux qui ſont cylindriques, & les voûtes les plus ordinaires en architecture, ſoit en angle rentrant de la concavité des doëles, comme dans la partie A *c* C I G D de la figure 45, ce qu'on appelle en *arc de cloître*, ſoit en angle ſaillant de la doële oppoſée à cet angle rentrant, dont la projection eſt B *c* C I F E, qu'on appelle en *arête*.

COROLLAIRE.

D'où il ſuit que ſi deux demi-cylindres ſe croiſent en ſe pénétrant l'un l'autre, il ne ſe forme plus à leur rencontre que des angles ſaillans à la doële concave, d'où vient qu'on appelle ces ſortes de voûtes très-ordinaires dans nos Egliſes, *voûtes d'arêtes*, parce que leurs plans ſont en forme de croix † (*).

(*) Il ne ſera pas inutile ici de faire remarquer aux Com-

THÉORÊME III.

La section faite par la rencontre des surfaces de deux cylindres droits inégaux, dont les axes se coupent perpendiculairement, est un cycloimbre.

Fig. 47. Soient deux moitiés de cylindre HBEC & IFGK, dont les axes HC & X*n* prolongés se croisent en X perpendiculairement, je dis que la courbe d'intersection de leurs surfaces est un cycloimbre, tel que nous l'avons défini (page 28), c'est-à-dire une courbe à double courbure, qui ne peut être exprimée par une surface plane que par la projection, & dont toutes les ordonnées à l'axe courbe sont égales à celle d'un cercle soutendant, & tous les diametres perpendiculaires à l'axe de profondeur, sont égaux à ceux du même cercle.

DÉMONSTRATION.

Si l'on suppose ces deux cylindres ou demi-cylindres (ce qui suffit) coupés par un plan perpendiculaire à l'axe du grand, & parallele à celui du petit, il fera deux

mençans qu'il y a une erreur de construction dans le Livre de Menuiserie de Me Blanchard (page 68) pour qu'ils la corrigent dans le discours relatif à la planche 17 : il est dit que les élévations tendent au centre (supposé 1er) ; d'où il résulte un *arc en tiers point*, au lieu d'une *ellipse*.

ſections différentes dans ces corps, ſçavoir un demi-cercle HPC dans le grand, & un parallélogramme YZFn dans le petit, dont les circonférences ſe couperont au point Z, qui ſera commun par conſéquent aux deux ſurfaces concaves ou convexes de ces corps, lequel point Z ſera repréſenté ſur le plan paſſant par les deux axes au point Y, qui eſt le plus avancé de tous vers X.

Si l'on ſuppoſe d'autres plans paralleles au premier NHZFn, ils feront toujours la même ſection circulaire dans le grand cylindre, mais de plus petits parallélogrammes dans le petit, ſelon qu'ils ſeront plus ou moins éloignés de l'axe Xn; & comme la ſection circulaire dans le grand ſera toujours la même, on peut rapporter au même demi-cercle NHP toutes les hauteurs des ordonnées du demi-cercle FhG,o1,o2, par des paralleles à l'axe nX, qui couperont ce cercle en des points différens Zz z communs aux deux ſurfaces, deſquels abaiſſant des perpendiculaires ſur la projection des plans coupans les deux corps par les lignes RQ, rq, elles les couperont aux points YyyK qui donneront la projection YyK de l'axe courbe de la commune interſection des deux ſurfaces, auquel ſont appliquées toutes les ordonnées du cercle.

On peut donc reconnoître dans cette

figure les trois lignes principales que nous avons assignées au cicloimbre, sçavoir, 1°. le diametre IK soutendant, passant par les points I & K diamétralement opposés & communs aux deux surfaces. 2°. L'axe courbe, dont Y*y*K est la moitié, & l'autre YI. 3°. L'axe de profondeur PY, par lequel passent perpendiculairement tous les diametres du cicloimbre, lesquels étant tous terminés à la circonférence du petit cylindre, dont PY est une portion de l'axe, sont par conséquent tous égaux; ce qui est une propriété du cicloimbre.

Pour ôter à cette figure la confusion apparente des lignes, il faut élever par la pensée le plan HZF*n*, perpendiculairement aux plans passant par les axes HC, X*n* des deux cylindres, & concevoir que sur ce premier plan, ainsi relevé, on y a appliqué en projection verticale les sections d'autres plans qui lui étoient paralleles, passans par les lignes RQ, *rq*; ce qui montre que toutes les ordonnées au cercle de la demi-base du petit cylindre F*h*G, sont égales en hauteur à celles de la section, sçavoir F*n*=ZY, *n*2=VZ, *n*1=*uz*, &c, & que si on releve par la pensée le quart de cercle *nh*G perpendiculairement au même plan par les axes des cylindres, on aura encore les mêmes ordonnées égales aux précédentes

$u2 = n2$, & $o1 = n1$, &c. lesquelles sont paralleles & égales aux appliquées à l'axe courbe aux points Yyy; ce qui est encore une autre propriété du cicloimbre. Donc, &c.

COROLLAIRE.

Il suit que puisque tous les points de cette courbe sont également sur les deux cylindres, on peut représenter cette courbe à double courbure sur les surfaces de chacun de ces cylindres, qui peuvent être développés en parallélogrammes, & par conséquent les réduire à des courbes planes; ce qui donne une bonne introduction pour la pratique de la coupe des pierres, où l'on peut se servir de panneaux flexibles, comme nous le dirons en son lieu.

Application à l'usage.

Rien n'est plus ordinaire dans les voûtes, que de voir des petits berceaux en percer de plus grands perpendiculairement en tout, ou en partie, en tout, comme un puits dans le milieu d'une voûte de cîterne en berceau, ou en partie, comme les lunettes des nefs des Eglises, où sont les vîtraux qui les éclairent, comme au Val-de-Grace, à Paris & ailleurs.

THÉORÊME IV.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux cylindres inégaux, dont les axes ſe coupent obliquement eſt une ellipſimbre.

Fig. 48. La démonſtration de cette propoſition ſe déduit facilement de la précédente, parce qu'il n'y a de différence que dans l'obliquité des interſections des axes, d'où ſuit celle du contour de la courbe de rencontre des ſurfaces, relative non au cercle, mais à l'ellipſe, dans le quart de cylindre ABCDE*c*, & la moitié d'un autre plus petit LIKN, dont les axes C*c* & MX ſe rencontrent en X obliquement, ſuivant l'angle MX*c*.

Si l'on ſuppoſe un plan perpendiculaire à celui qui paſſe par cet angle, il ſera dans ces cylindres deux ſections différentes, repréſentées à part, ſçavoir par un quart d'ellipſe PHX dans le grand cylindre, qui eſt coupé obliquement, & un parallélogramme LZYM dans le petit, qui eſt coupé parallélement à ſon axe, leſquelles ſections ſe croiſent en Z, qui ſera un point commun aux deux ſurfaces de ces corps, en ſuppoſant ce plan LZHXM élevé en l'air, quoiqu'il ſoit en partie confondu dans la figure ſur celui des axes, lequel Z eſt projetté en Y.

Préſentement ſi l'on ſuppoſe un 3me plan tangent au grand cylindre paſſant par les points communs aux deux ſurfaces en I & K, il coupera le petit cylindre obliquement par une ellipſe I S K, qui ſera toute hors du grand cylindre, avec lequel elle n'a que deux points communs I & K, mais qui déterminera la poſition des points correſpondans de la ligne courbe à double courbure de l'interſection des deux ſurfaces, comme dans le cicloimbre, par la prolongation des côtés du petit cylindre coupé par des plans paralleles au premier I Z H X M; ou, ce qui eſt la même choſe, perpendiculaire au plan par les deux axes des cylindres M X C. Ainſi la perpendiculaire abaiſſée du point Z ſur M X, coupera l'axe du petit cylindre au point Y, qui eſt le centre de l'axe courbe IYK, où paſſe l'axe droit de la courbe d'interſection, mais non pas le milieu de cet axe, comme dans le cicloimbre, parce que l'axe de profondeur PY n'eſt pas perpendiculaire à l'axe de l'ellipſe ſoutendante IK; d'où il ſuit que la partie I Y, oppoſée à l'angle aigu I P Y, eſt plus petite que l'autre Y K, qui eſt oppoſé à l'angle obtus de ſuite Y P K.

Il faut cependant obſerver que dans l'une & l'autre partie de cet axe courbe, il y a un même nombre des ordonnées du cer-

cle, appliquées perpendiculairement au plan par l'axe LYN, ſçavoir $q1$, $q2$, Q3, leſquelles ordonnées ſont les mêmes que celles de l'ellipſe plane ISK; cependant les intervalles Yy, yI ſont plus petits que ceux de l'autre côté Yx, xK; d'où vient l'irrégularité du contour de l'ellipſimbre, qui eſt plus arrondi du côté du ſommet I que du côté de K. Au reſte on trouve tous les points de cette courbe par les mêmes moyens que ceux du cycloïmbre, comme nous le dirons au 2e Livre, parce que par le plan & le profil de cette figure, les trois lignes eſſentielles de cette ſection, ſçavoir l'axe ſoutendant IK, l'axe de profondeur PY, qui eſt oblique au précédent, & l'axe courbe IYK ſont donnés.

Fig. 48.

Application à l'uſage.

Cette propoſition fait voir quelle eſt la courbe d'arête de l'enfourchement d'une lunette biaiſe dans un berceau, lorſque les impoſtes de l'un & de l'autre ſont de niveau, ou celle d'un puits ou d'un ſoupirail cylindrique, qui tombe à plomb ſur un berceau en deſcente, comme on en voit quelquefois dans les ſouterreins des fortifications.

THÉORÊME V.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces de deux berceaux inégaux, dont l'un pénetre l'autre de toute ſa circonférence, ſans que les axes ſe rencontrent, eſt une ellipſimbre.

Et ſi le petit ne pénetre l'autre que d'une partie de la circonférence, la ſection eſt une ellipſimbre compoſée.

Premiere partie de la propoſition.

Soit F G I K une portion ou zone de cylindre, dont le rayon eſt C K, laquelle ſurface eſt rencontrée par celle d'un autre cylindre A B D E plus petit, dont l'axe N x ne rencontre pas celui du grand cylindre prolongé C M : car quoiqu'il paroiſſe le croiſer dans la figure, on peut ſuppoſer un intervalle horizontal de l'un à l'autre, qu'on ne peut repréſenter que par une autre nouvelle figure différemment tournée. *Fig.* 49.

Si l'on ſuppoſe un plan ABDE perpendiculaire à la direction de la ſurface du grand cylindre, qui eſt parallele à celle de l'axe CM, & paſſant par l'axe Nx du petit, il eſt clair qu'il fera deux ſections différentes dans les deux corps, l'une circulaire H D E I dans le grand, l'autre ſera un parallélogramme A B lc dans le petit, dont le trapeze ABDE

eſt une partie, dont les côtés A E & B D coupent la ſection circulaire H I aux points D & E, qui ſont par conſéquent communs aux deux ſurfaces de l'un & de l'autre cylindre, & diamétralement oppoſés dans celle du petit, coupé à ſon axe N x en O.

Préſentement ſi l'on ſuppoſe un troiſieme plan perpendiculaire à celui du parallélogramme par l'axe, & paſſant par les deux points communs D & E, il fera encore deux ſections planes différentes, ſçavoir, une ellipſe D P E S dans le petit cylindre coupé obliquement en D E, & un parallélogramme $fgki$ dans le grand, coupé parallélement à ſon axe R C X en Ts.

D'où il eſt aiſé d'appercevoir, comme dans les propoſitions précédentes, qu'aucune de ces ſections planes ne peut être commune à la rencontre des deux cylindres : par conſéquent que la courbe d'interſection de leurs ſurfaces ſera encore une ellipſimbre, puiſqu'elle ſera relative à la ſection elliptique D P E S, non en prolongeant les côtés du cylindre qui la produit, comme dans les cas d'ellipſimbres précédens, mais en les raccourciſſant de E en S, & de D en S, ſuivant la convexité de l'arc gsk d'un côté, & de même de l'autre en D P E ; d'où réſulte une différence de poſition de l'axe courbe qui étoit au dedans

du grand cylindre, & qui se trouve ici à sa surface & circulaire, suivant l'arc DRE.

§. Par la même raison, l'axe droit TS se trouve à la surface du grand cylindre, & par conséquent égal à celui de la section plane PS elliptique, puisque ces deux lignes PS & TS sont terminées par les mêmes côtés du cylindre *a*T, *b*S; il en sera de même de toutes les ordonnées de la section plane elliptique DPES à l'égard de la courbe à double courbure, comme il sera aisé de le reconnoître, en supposant des plans paralleles à l'axe du petit cylindre qui coupent le grand, parallélement à l'axe TS ou PS; ce qui montre l'égalité des ordonnées de l'ellipse plane avec celles de l'ellipsimbre.

COROLLAIRE.

Il suit delà que plus le côté AE du petit cylindre approchera de l'extrêmité du rayon CK, plus la courbe d'intersection des deux surfaces s'alongera, jusqu'à ce que le côté AE soit transporté en I au point d'attouchement de l'arc HR, par le côté LIK, au-delà duquel, si on le pousse, il ne coupera plus la surface du grand cylindre; ce qui constitue le second cas de cette proposition.

SECOND CAS,

Où le petit cylindre tombe en partie hors du grand.

Fig. 50. Soit le demi-cercle ADB, la moitié de la base du grand cylindre, dont le centre est C, & le petit cylindre KLON, dont l'axe XR passe hors du grand, dans lequel il n'y a que le côté LO qui y entre de E en F, où l'on suppose l'intersection des deux surfaces aux points de rencontre du côté LO du petit cylindre, & de la circonférence de la base ADB, qui n'en est pénétrée que dans la partie EDF, le reste du petit cylindre étant dehors du grand.

Si l'on suppose un plan perpendiculaire à l'axe xR passant par le centre C du grand cylindre, il est évident qu'il fera deux sections différentes, l'une circulaire GHI dans le petit cylindre, & l'autre parallélogramme dans le grand, parce qu'il passera par l'axe du grand; & comme ce plan est supposé perpendiculaire à celui de la premiere section par l'axe du petit cylindre, il ne peut être représenté en projection que par la ligne GC, dont la partie GI est le diametre du petit cylindre, dont la demi-circonférence est représentée en GHI, qui coupe la base ADB en y, duquel abaissant

une perpendiculaire *yp*, on aura ſur GC la projection du point *y* en *p*, où eſt le milieu des deux parties des ſections ſupérieures *p*E & inférieure *p*F, parce que l'arc EDF eſt coupé par une perpendiculaire à ſa corde EF.

Or ſi l'on ſuppoſe un troiſieme plan perpendiculaire à celui du parallélogramme par l'axe du cylindre, & paſſant par les points E & *p*, il coupera le cylindre en E*pe* par une section oblique, qui y formera une ellipſe, dont E*e* eſt le grand axe, duquel *p*E eſt une partie qui entre dans le grand cylindre; par la même ſuppoſition un plan F*p*K, pareillement ſitué en ſens contraire, formera une ellipſe dans le petit cylindre, dont la partie *pf* eſt hors du grand, & le reſte *p*K eſt compris.

Or par la premiere partie de ce problême, ces ellipſes planes ſont les ſoutendantes d'une ellipſimbre chacune : donc la ſection totale à double courbure eſt une *ellipſimbre compoſée* de deux portions égales qui font un angle entr'elles, relatif à celui des deux ſections planes, qui ſe rencontrent aux points commun *y* d'un côté, & Y de l'autre, qui répond au point *p*. C. Q. F. D.

Application à l'uſage.

Cette courbe ne peut guere tomber en

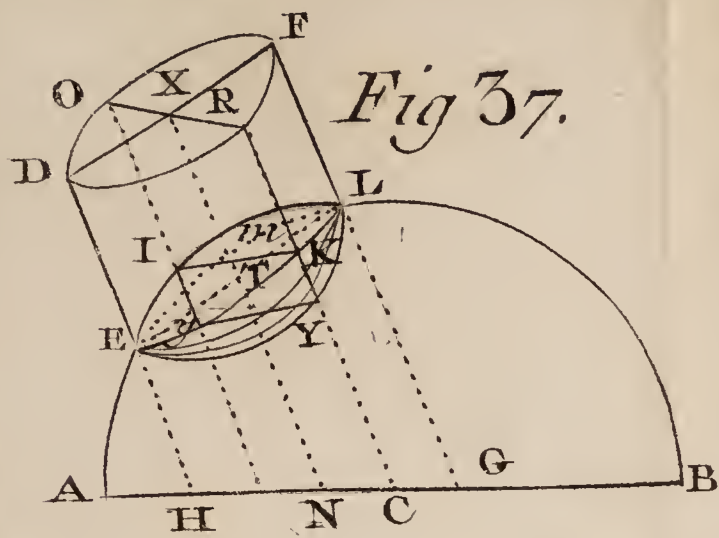
pratique dans l'architecture que dans une de ſes moitiés : alors ce n'eſt que le cas d'une ellipſimbre incomplete, parce que dans les voûtes il n'y a que des moitiés de cylindre : d'ailleurs, c'eſt que ſi l'ellipſimbre compoſée étoit en ſituation horizontale, excédant l'axe du petit cylindre, l'angle d'inflexion tomberoit au deſſous de la clef ; ce qui ne pourroit s'exécuter, parce qu'elle pouſſeroit en contre-bas.

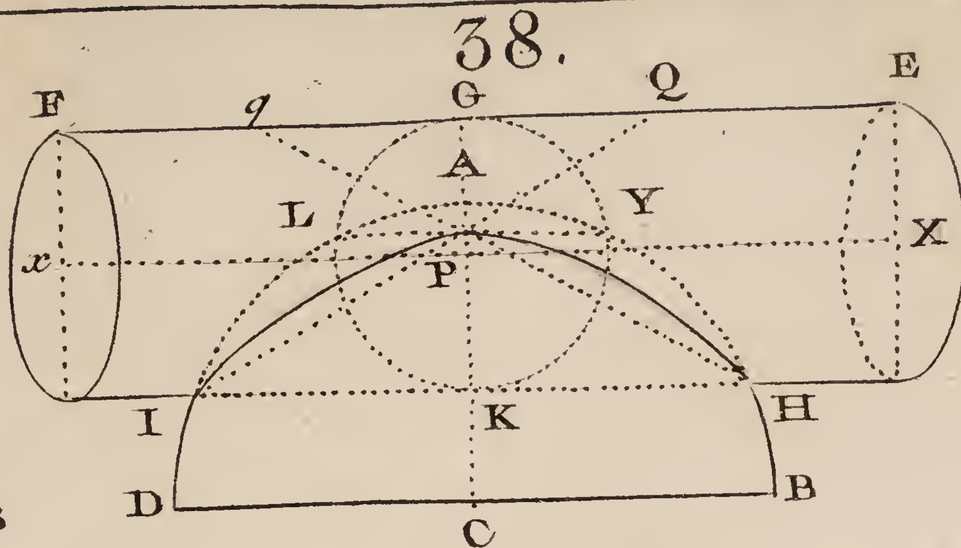
CHAPITRE II.

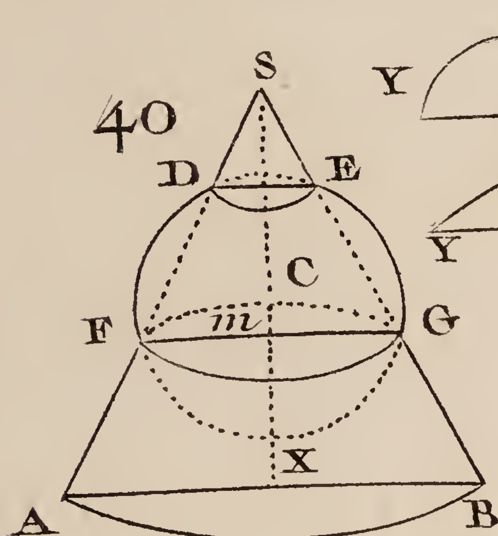
Des Sections faites par la rencontre des ſurfaces des cônes & des cylindres qui ſe pénetrent mutuellement.

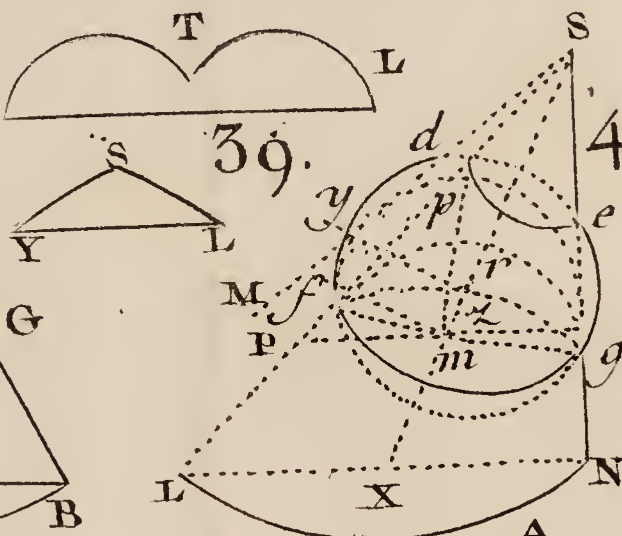
IL faut faire une diſtinction des grandeurs relatives de ces corps pour s'énoncer ſur la profondeur de leurs pénétrations, qui peut être de toute la circonférence, ou d'une partie de l'un des deux, conſidérant que les côtés du cylindre étant paralleles entr'eux, ſont limités dans leurs diſtances à l'axe, mais non pas ceux des cônes qui peuvent s'en écarter à l'infini, en s'éloignant du ſommet du cône.

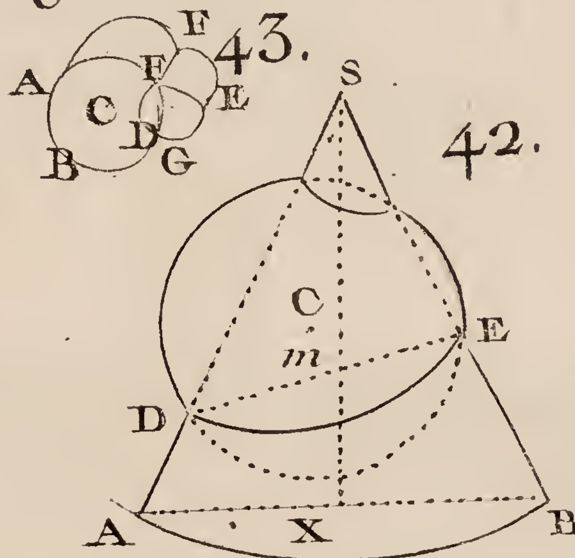
La premiere poſition relative de ces deux corps dans leur pénétration, eſt celle où leurs

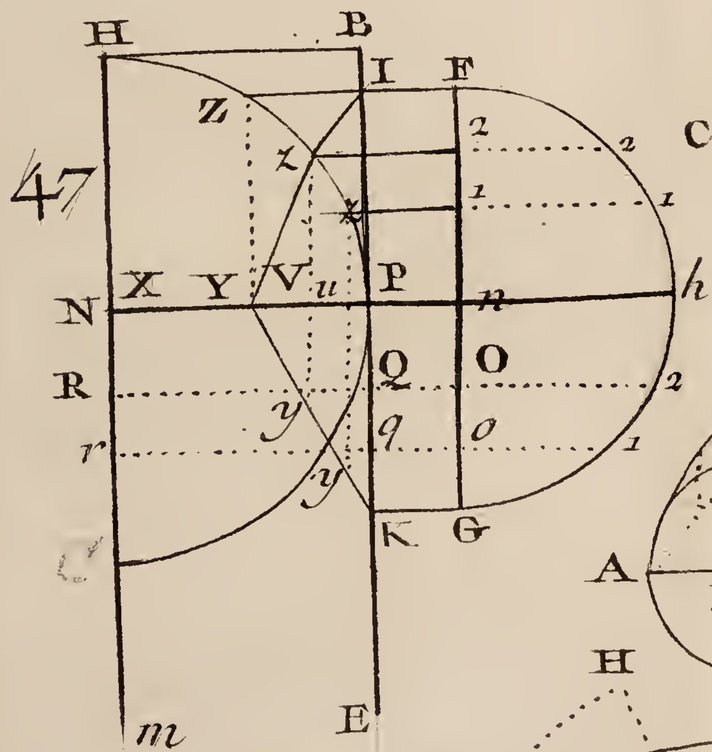

Fig 37.
F
O
X
R
D
L
m
I
T
K
E
Y
A
G
B
H
N
C

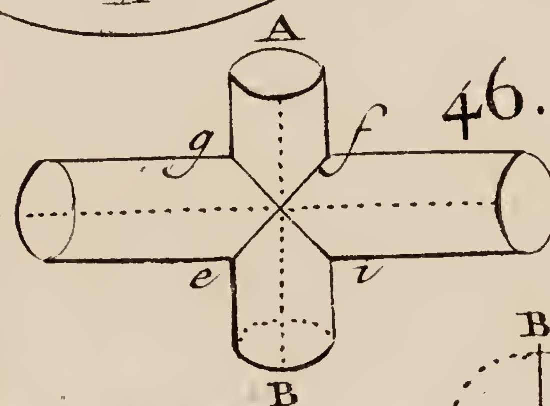

38.
F
q
G
Q
E
A
L
Y
x
X
P
I
K
H
D
B
C

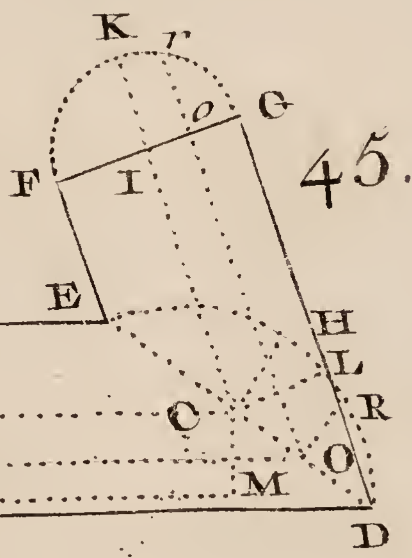

40
S
D
E
C
F
m
G
X
A
B

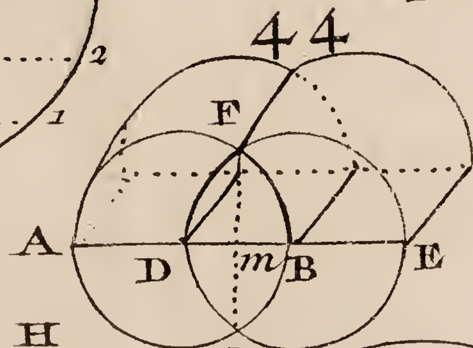

T
Y
L
S
39.
Y
L
S
d
41.
y
p
e
M
f
r
z
P
m
g
L
X
N

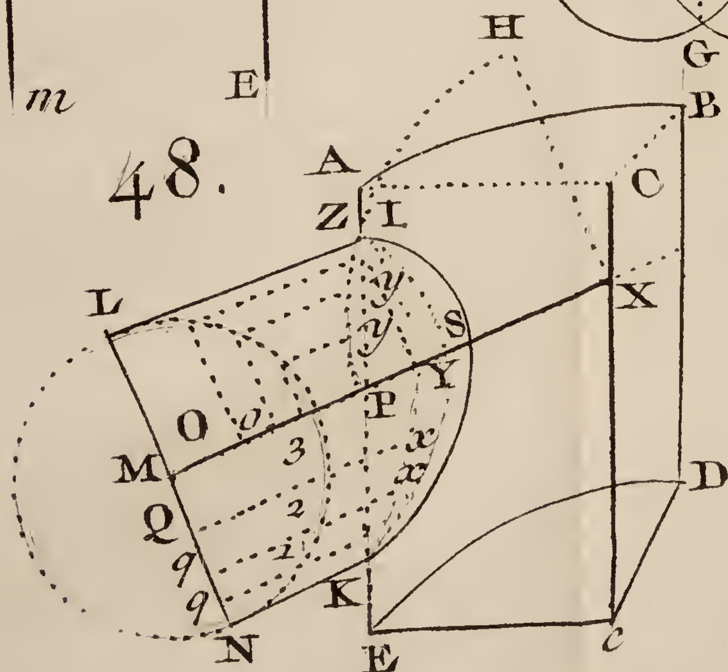

43.
A
F
F
C
E
D
B
G
S
42.
C
E
m
D
A
X
B

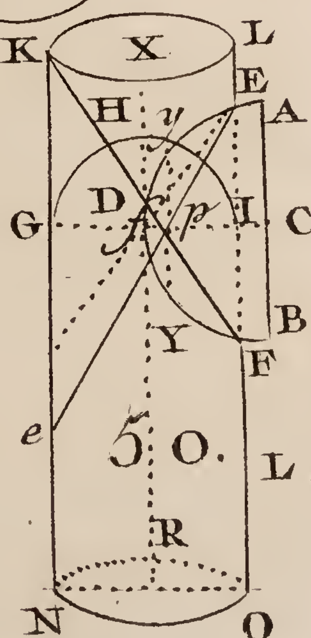

47
H
B
I
F
Z
2
2
z
1
1
z
X
Y
V
u
P
h
N
n
R
Q
O
2
r
y
q
o
1
y
K
G
m
E

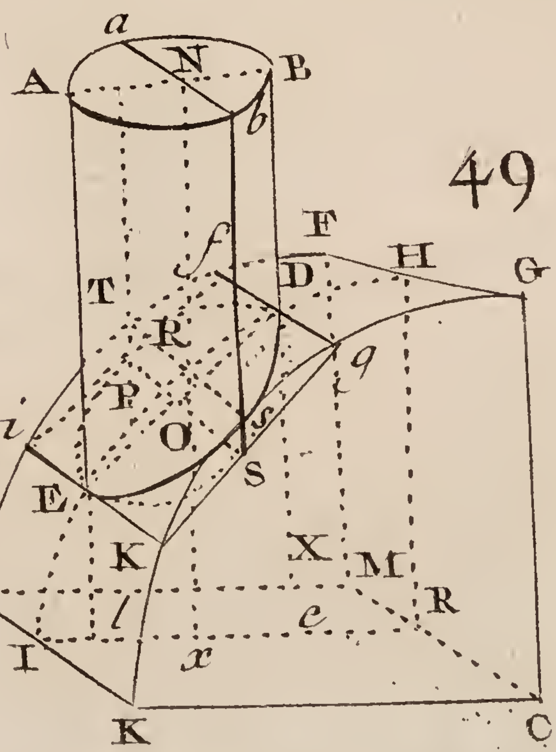

46.
A
g
f
C
D
e
i
B


45.
K
r
o
G
F
I
B
E
H
L
h
C
C
R
r
n
m
M
O
A
D


44
F
A
D
m
B
E
G


48.
H
B
A
C
Z
I
L
y
X
S
y
Y
P
O
o
M
3
x
x
2
D
Q
1
q
q
K
N
E
c


50.
K
X
L
E
H
y
A
G
D
p
I
C
B
Y
F
e
R
N
O


49.
a
A
N
B
b
F
f
D
H
G
T
R
q
P
i
O
S
E
K
X
M
L
l
e
R
I
x
K
C

leurs axes se confondent, étant prolongés, s'il le faut, de sorte qu'ils sont communs; alors, soit qu'ils soient perpendiculaires à leurs bases, comme les cônes & cylindres droits, ou tous les deux scalenes, semblablement posés, leurs intersections sont des courbes planes ou des cercles, comme dans le premier cas, ou des ellipses; & dans l'un & l'autre cas, les diametres de ces sections planes sont paralleles aux bases, comme il est aisé de l'appercevoir, pour peu qu'on ait vu des élémens de Géométrie.

Dans cette circonstance, on doit dire que le cylindre pénetre le cône.

Mais si le cylindre & le cône sont de différentes especes, l'un scalene, l'autre droit, la section sera une ellipsoïdimbre, c'est-à-dire une courbe à double courbure, semblable à une ellipsimbre, comme le signifie le mot tiré du Grec, en ce que ses ordonnées ne sont pas égales à celles de l'ellipse plane, soutendante, mais dont l'excès ou le défaut sont connus, comme nous allons le démontrer.

Soit un cône A S B scalene, pénétré par un cylindre droit F G I H, qui ont leurs axes en partie communs, c'est-à-dire dans la même direction prolongée, sçavoir S C du cône, & x X du cylindre, supposant une section plane par cet axe commun, elle *Fig. 53.*

formera dans le cône le triangle ASB, & dans le cylindre le parallélogramme FGIH, dont les côtés se couperont en D & E, qui sont des points communs aux deux surfaces différentes de ces corps.

Si l'on suppose un second plan perpendiculaire au premier, passant par ces deux points, il fera deux sections différentes, l'une circulaire, exprimée par le demi-cercle DOE dans le cône, parce que DE est parallele à la base AB; l'autre elliptique dans le cylindre coupé obliquement, exprimée par la demi-ellipse DLE, dont DE est le grand axe, & mL = HX est le petit.

Puisque ces deux sections sont différentes, il est clair que ni l'une ni l'autre ne peut être l'intersection des deux surfaces, mais que ce sera une courbe à double courbure, dont on veut connoître le rapport des ordonnées avec celles de l'ellipse du cylindre.

Pour y parvenir, on prendra dans le diametre DE un point P à volonté, d'où l'on tirera une ligne PS au sommet du cône S, & du même point une perpendiculaire PO à ce diametre DE, qui coupera le demi-cercle DOE au point O, & la demi-ellipse inscrite au point K.

On portera cette ligne PO avec sa divi-

ſion K en PQ, perpendiculairement à PS, & l'on tirera QS, qui repréſentera le côté du cône coupé perpendiculairement au triangle par l'axe DSE ſuivant la ligne PS; enſuite par le point K, on tirera une parallele à PS qui coupera le côté QS au point y, & une autre yz parallele à PQ qui coupera PQ en z.

Préſentement à cauſe des triangles ſemblables QSP, QyK, on aura PQ = PO : KQ = kO :: PS : ky, & PQ : QS :: kQ : Qy, c'eſt-à-dire la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée de l'ellipſe plane eſt à cette ordonnée, comme la profondeur yk ou ſon égale PZ de la ſection ſolide à cette ordonnée, eſt à la différence des ordonnées de la ſection plane & de la ſolide, ce qui conſtitue l'ellipſoïdimbre, ſuivant notre définition; & parce que nous ſuppoſons dans la figure la ligne yZ parallele à PQ, le point Z ſera un de ceux de l'axe courbe DZE; ce qu'il falloit faire & démontrer: car quelqu'autre point que P, qu'on prenne dans l'axe DE, on aura toujours la même analogie.

Application à l'uſage.

La premiere partie de cette propoſition fait voir que l'arête de rencontre de l'ébraſement & du tableau d'une porte en plein

ceintre, ſurmontée ou ſurbaiſſée, eſt de même nature de courbe que ces deux différentes doëles, ſi l'axe, qu'on peut réunir au centre de l'épure, eſt commun au berceau & à l'ébraſement.

La ſeconde fait voir que ſi le tableau de la porte eſt un berceau en plein ceintre, & que l'ébraſement ſoit ſurmonté ou ſurbaiſſé, quoique d'un centre commun, l'arête que formera la rencontre des deux doëles, ne ſera plus une courbe plane qu'on peut bornoyer par un à plomb, mais une courbe à double courbure, comme celle des lunettes dans un berceau.

Nous venons de ſuppoſer que les axes ſe confondent: il faut examiner préſentement ce qui arrive lorſqu'ils ſe croiſent.

Il eſt un cas unique, dont j'ai parlé dans ma Stéréotomie, où la courbe d'interſection eſt une ellipſe; mais comme c'eſt un grand hazard qu'il tombe en pratique, nous croyons pouvoir le paſſer dans cet abrégé, renvoyant les curieux au théor. 24 du premier tome, parce que nous donnerons dans la ſuite un moyen général de ſuppléer à la théorie de ce cas pour l'exécution.

THÉORÊME I.

La ſection faite par la rencontre des ſurfaces d'un cylindre & d'un cône qui ſe croiſent, enſorte que leurs axes ſe coupent, ou au contraire qui ſont paralleles entr'eux, eſt une ellipſimbre.

Premier cas, lorſque les axes ſe coupent perpendiculairement ou obliquement.

Soit un cône A S B pénétré par un cylindre D H F E, dont les axes SC & *x*X ſe croiſent en K, ſi l'on ſuppoſe un plan paſſant par ces deux axes, il fera deux ſections différentes dans ces corps, ſçavoir dans le cône un triangle par l'axe, par exemple ISL, & un parallélogramme DHFE dans le cylindre, dont le trapeze qui en eſt une partie dans le cône, le coupe à la ſurface, ſuivant une ligne E P oblique à l'axe *x* X, par laquelle, ſi on fait paſſer un plan perpendiculaire à celui du parallélogramme par l'axe, il ſe formera une ellipſe dans le cylindre, qui ſera tangente au cône, & toute hors de ce cône, & de laquelle cette ligne E F ſera le grand axe; & comme cette ellipſe plane eſt toute hors du cône, depuis le point E juſqu'en F, qui ſont communs aux deux ſurfaces, leur interſection ſera en dedans en E *z y* F d'un côté, & de même *Fig. 54.*

de l'autre, qu'on n'a pas tracé pour éviter la confusion des lignes.

Présentement si l'on suppose un plan perpendiculaire au premier, passant par l'axe du cylindre, il fera dans ce corps un parallélogramme pdR M, & un cercle, ou une ellipse dans le cône qui coupera sa surface en yXt, dont MR est la tangente terminée par les côtés P M & dR du cylindre, qui coupent la surface du cône aux points y & t, qui sont par conséquent communs aux deux surfaces coniques & cylindriques: d'où il suit que y M & tR étant les distances de la tangente au cône, sont égales; par conséquent yt égale à MR, c'est-à-dire l'ordonnée de la section solide égale à la section plane; ce qui constitue l'ellipsimbre: on prouvera de même que zg est égal à nr, & ainsi d'autant de points qu'on voudra chercher dans cette courbe, par des sections planes paralleles à la précédente.

Pour le second cas, où l'on suppose les axes du cône & du cylindre paralleles entr'eux, la même figure & démonstration peut servir, en supposant un cylindre 1, 2, 3, 4, dont l'axe V X est parallele à celui du cône S C: car la même ellipse E R F M peut être considérée comme une section oblique de ce cylindre coupé par un plan tangent au cône, & suivant la ligne du côté du cône

EF ; ce qu'on appercevra avec un peu d'attention.

COROLLAIRE.

Il n'eſt pas difficile de reconnoître que les interſections des cylindres & des cônes qui en ſont pénétrés, ne ſont égales à l'entrée & à la ſortie que dans le cas où leurs axes ſe coupent perpendiculairement ; car pour peu qu'ils ſoient inclinés, l'interſection qui eſt la plus près du ſommet du cône, doit toujours être plus petite que ſon oppoſée, parce qu'elle approche plus de la perpendiculaire au côté du cône, qui eſt d'ailleurs plus étroit en cette partie.

Nous avons examiné ci-devant la ſection qui ſe fait à la ſurface de ces deux corps, lorſque le cylindre pénetre le cône. Il faut préſentement conſidérer celle qui réſulte de leur pénétration mutuelle, lorſque le cône pénetre le cylindre ; ce qui paroît, du premier abord, la même choſe énoncée différemment, mais cependant qui ne l'eſt pas : car on a vu que de la premiere combinaiſon il en réſultoit une ellipſimbre, & dans celle-ci une ellipſoïdimbre, dans toutes les poſitions qu'on peut y conſidérer. 1°. Lorſque l'axe du cône coupe perpendiculairement celui du cylindre ; 2°. lorſqu'il le coupe obliquement ; 3°. lorſ-

que l'axe du cône ne rencontrant pas celui du cylindre, tombe obliquement ſur le côté, & entre en tout ou en partie de ſa circonférence; 4°. lorſqu'il n'y a qu'une partie de ſon contour qui entre dans le cylindre obliquement.

Dans tous ces cas, quoique fort différens, la ſection eſt une ellipſoïdimbre: ſoit un cylindre ABED pénétré par un cône FGS, dont les axes *c*X & TS ſe coupent perpendiculairement ou obliquement en O.
Fig. 55.
Si l'on ſuppoſe un plan paſſant par ces axes, il eſt évident qu'il fera deux ſections rectilignes dans ces corps, ſçavoir un parallélogramme dans le cylindre, que nous repréſenterons ici pour la commodité de la figure par N*nr*R, & un triangle dans le cône FSG, dont nous ſuppoſerons le cercle de la baſe FHG*h* dans un plan tangent au cylindre, ſuivant le diametre FG, qui eſt ſeul commun à la ſurface du cylindre, & à la baſe du cône, le reſte de ce cercle ou ellipſe étant tout hors du cylindre; enſorte que la courbe de l'interſection des deux ſurfaces de ces corps ſera au deſſous, par exemple en FK*l*GL, avec laquelle elle n'aura que les deux points communs F & G.

Si l'on tire des ordonnées H*h*, *li* à ce diametre ou axe d'ellipſe FG, elles toucheront la ſurface convexe du cylindre aux

points T & t, & feront perpendiculaires aux lignes menées au ſommet T S, t S.

Préſentement ſi l'on ſuppoſe des plans paſſans par ces ordonnées & le ſommet du cône, ils feront deux ſections différentes, ſçavoir un triangle H S h, I S i dans le cône, & un cercle ou une ellipſe dans le cylindre, dont Ktk ou LTl feront des arcs, & les ordonnées Kk & Ll feront les cordes, leſquelles feront plus petites que les ordonnées à la baſe du cône, parce qu'elles approchent plus du ſommet du cône, dont les côtés H S, hs ſont convergens : il s'agit d'en déterminer la différence, laquelle étant petite dans la figure, pourroit y cauſer de la confuſion ; c'eſt pourquoi nous avons mis à part une moitié des triangles des ſections par le ſommet du cône avec les mêmes lettres, par exemple H T S : ſi l'on tire par le point z de l'interſection des deux ſurfaces une ligne zp parallele à S T, on aura deux triangles ſemblables H T S, Hpz, dans leſquels on aura les analogies ſuivantes S T:T H :: Zp : pH, c'eſt-à-dire que la diſtance du ſommet du cône à l'ordonnée du cercle ou de l'ellipſe plane de la baſe, eſt à cettte ordonnée, comme la profondeur de la ſection ſolide au deſſous de la plane, eſt à la différence de cette ordonnée avec celle de la ſection *Fig. 56.*

ſolide : donc la courbe FKLG, &c. eſt une *ellipſoïdimbre*, ſuivant notre définition. C. Q. F. D.

Suppoſant que le cône traverſe le cylindre, il eſt clair qu'il s'y fera deux ſections oppoſées, une vers le ſommet qui ſera la plus petite, & une vers la baſe qui ſera la plus grande, & que les deux ſections ſolides auront leurs axes courbes tournés en ſens contraires ; ce qui ne change rien à l'analogie, mais qui donne des différences inégales, les unes en excès, les autres en défaut.

Il eſt encore viſible que le même rapport des différences ne peut être appliqué à toutes les ordonnées, mais chacune d'entr'elles a un rapport différent à ſa correſpondante.

Si l'axe du cône ne rencontre pas celui du cylindre, mais qu'il tombe perpendiculairement ſur un côté, c'eſt-à-dire une ligne droite priſe à ſa ſurface, & parallele à ſon axe, la courbe d'interſection ſera encore de même eſpece.

Fig. 57. Soit SP une partie de l'axe du cône qui tombe perpendiculairement ſur le côté du cylindre HI, & un plan SEL coupant le cylindre perpendiculairement à la ligne HI, il coupera auſſi de même les paralleles R*r*, Q*q*, menées par les points E, L, in-

terſections de la ſurface du triangle par l'axe S E L, & des côtés du cylindre R r, Q q; ce qu'on n'a pu exprimer dans la figure, pour éviter la confuſion des lignes de perſpective ou de projection, où le triangle n'auroit dû être déſigné que par la ſeule ligne E L; d'où il réſulte que les points E & L ſont communs aux deux ſurfaces du cône & du cylindre, puiſqu'ils ſont les interſections de leurs côtés qui ſe croiſent.

Si l'on ſuppoſe enſuite un ſecond plan paſſant par ces deux points communs E & L, parallélement à l'axe du cylindre, il fera deux ſections différentes, l'une en parallélogramme R rq Q dans le cylindre, & une ellipſe dans le cône E l L p qu'il coupe obliquement à l'axe S C.

Préſentement ſoit que l'on tire des ordonnées à l'axe E L de la ſection plane, ou des paralleles qui ſeront les ordonnées à ſon axe conjugé; il eſt évident qu'elles ſeront toutes dans le cylindre, parce qu'étant toutes plus petites que le diametre de l'ellipſe E L, elles ne pourront atteindre à la ſurface du cylindre, dont les bornes ſont les lignes paralleles R r, Q q du parallélogramme, qui eſt la ſection parallele à l'axe du cylindre, paſſant par les points E L, dans lequel parallélogramme eſt l'ellipſe E p l L qui eſt celle du cône: donc les ordonnées

à la section solide, dont l'axe courbe est l'arc E T L de la surface du cylindre seront plus près du sommet du cône S, & plus courtes.

Premiérement plus près, parce qu'étant plus courtes que E L, & devant se terminer à la circonférence de l'arc de section du cylindre R Q, dont la corde est égale à E L; elles y seront inscrites plus loin du centre de la section que R Q, par la 15[e] pr. du 3[e] Liv. d'*Eucl.*

Secondement plus courtes que les ordonnées de la section plane, parce qu'étant terminées par les côtés du cône, qui sont convergens, celle des paralleles, qui approche le plus près du sommet S, de la section triangulaire dans le cône, sera plus petite d'une quantité connue par l'analogie commune aux ellipsoïdimbres, dont nous avons parlé à la premiere partie de cette proposition, pour laquelle nous mettons une figure à part pour éviter la confusion de trop de lignes dans la figure.

Fig. 59. Soit le triangle D S *d* celui d'une des sections du cône par son sommet, & l'ordonnée D *d* de la figure précédente, dont le plan coupe aussi le cylindre suivant l'arc G P *g* circulaire ou elliptique, dont la corde G *g* est égale à E L, parce qu'elle lui est supposée parallele & comprise entre les deux

côtés du parallélogramme R *r* Q *q*.

Si des points D & *d* on tire des lignes au ſommet du cône S, elles couperont cet arc aux points Y & *y*, qui ſeront communs aux deux ſurfaces du cylindre & du cône, & donneront pour ordonnées de la ſection ſolide la ligne Y*y*, au lieu de ſa correſpondante D *d* dans l'ellipſe plane E L *d* D du cône, qui eſt plus grande ; ainſi la différence ſe trouvera par la même analogie qu'à la premiere partie de cette propoſition. Ayant tiré SM au milieu M de D *d*, & *y v*, Y *u* paralleles à SM, on aura SM : M*d* : : *y v* à *v d* ; ou, ce qui eſt la même pour l'autre moitié, SM : MD : : YV : VD, c'eſt-à-dire la diſtance de la ſection plane elliptique ſoutendante eſt à ſon ordonnée, comme la profondeur ou diſtance de l'ordonnée de la ſection ſolide à la ſection plane, eſt à leur différence que l'on cherche, parce que les triangles SMD & *y u* D ſont ſemblables, étant tous les deux rectangles, & ayant l'angle D commun ; *ce qu'il falloit faire & démontrer*, pour prouver que la courbe à double courbure eſt une *ellipſoïdimbre*.

Il eſt aiſé de reconnoître que s'il s'agiſſoit de la ſection courbe, la plus près de la baſe du cône, les différences des ordonnées qui ſont ici en défaut, ſeroient en excès à l'égard de la ſection plane dans le

cône, ſoutendante à celle à double courbure.

USAGE.

Cette propoſition ſert à faire connoître quelle eſt la courbe de l'arête d'enfourchement de toutes ſortes de lunettes ébraſées dans les berceaux, ſoit qu'elles aient leur naiſſance de niveau avec celle du berceau, qui eſt le cas où les axes du cône & du cylindre ſe rencontrent, ſoit que leurs naiſſances ſoient à différente hauteur; ce qui eſt le cas où les axes ne ſe rencontrent point.

Des interſections des ſurfaces des cônes qui ſe pénetrent mutuellement.

Les différentes grandeurs relatives des cônes qu'on peut ſuppoſer ſe pénétrer & la poſition de leurs axes, ſuppoſés paralleles ou ſe croiſer en ſe coupant, ou ſans ſe rencontrer, peuvent former différens cas de courbes planes, ou à double courbure, originaires, non ſeulement des cercles & des ellipſes, mais encore des paraboles & des hyperboles qui donnent des paraboloïdimbres & hyperboloïdimbres, dont les cas ne tombent preſque jamais en pratique, parce que les voûtes coniques ſont très-rares dans les ouvrages ordinaires d'architecture, excepté dans les trompes & les lunettes

ébrafées, ou des embrafures de canons, qu'on ne fait prefque plus en pierres de taille: or ces trompes, lunettes & embrafures ne font rencontrées par d'autres furfaces coniques, que dans des cas qui font auffi fort rares, & prefque hors d'ufage préfentement.

Les revêtemens de fortifications qui font en talud, offrent des furfaces coniques, lorfqu'ils font circulaires par leurs plans, ou concaves, comme les flancs, à la maniere du premier fyftême de M. de Vauban, ou convexes, comme les orillons du même fyftême; alors s'il y a des embrafures dans le flanc ou dans l'orillon, c'eft le cas d'un cône qui en pénetre un autre, dont les axes fe croifent en fe rencontrant, ou fans fe rencontrer, fuivant la ligne de direction du milieu de l'embrafure.

Dans l'architecture civile, pareils cas n'arrivent guere; je n'ai vu de voûte conique confidérable dans fa grandeur, que celle du berceau du grand efcalier du Vatican: s'il y avoit des lunettes ébrafées, ce feroit encore le cas de la rencontre de deux furfaces de cônes de grandeurs bien différentes, dont les axes fe croiferoient en fe rencontrant, fi les naiffances étoient de niveau ou leurs axes, ou fans fe rencontrer fuivant la différence du niveau, ou la direction des axes.

Ailleurs les cas des voûtes coniques qui ſe croiſent ſont ſi rares, que je ne crois pas devoir m'y arrêter dans un Livre élémentaire, où l'on ne doit pas s'amuſer à de ſimples curioſités, ſur leſquelles un lecteur plus curieux peut conſulter ma Stéréotomie, & y trouver de quoi ſe ſatisfaire ſur la connoiſſance des courbes qui réſultent de l'interſection des ſurfaces des cônes de différentes grandeurs & poſitions.

Il ſuffira pour la pratique de la coupe des pierres d'avoir une méthode commode d'exécuter les cas d'enfourchement de ces ſortes de rencontres de ſurface, que nous donnerons au ſecond Livre.

Des interſections des ſurfaces des ſphéroïdes, pénétrés par des ſpheres, ſphéroïdes, cônes, ou conoïdes.

Nous pourrions avec plus d'apparence d'application à l'uſage, parler ici de la nature des courbes des interſections de ces ſurfaces; mais la même néceſſité d'abréger ces élémens, nous engage à renvoyer les lecteurs, qui ſeront curieux de s'en inſtruire, à la même ſource de ma Stéréotomie, chap. 8 du premier Livre, dans le deſſein de nous étendre un peu plus particuliérement ſur le ſecond Livre, qui comprend les

les problêmes de Géométrie indiſpenſables, pour être en état d'opérer dans les deſcriptions des lignes courbes qui ſe préſentent en différentes circonſtances de données pour la pratique des épures, c'eſt-à-dire des repréſentations exactes & meſurées des corps entiers ou coupés en pluſieurs parties par des ſurfaces planes ou courbes.

De la deſcription des lignes courbes, formées par la ſection des corps.

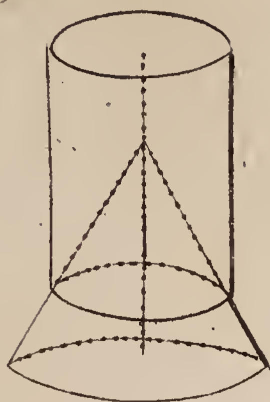
Nous avons examiné dans le Livre précédent la nature & les propriétés des lignes courbes, formées par les ſections des corps coupés par des ſurfaces planes, ou pénétrés par des ſolides. Il s'agit à préſent de les décrire ſur les ſurfaces où elles peuvent être tracées.

Il eſt évident que celles de la premiere eſpece peuvent être décrites ſur une ſurface plane, puiſqu'elles peuvent être dans le couteau plan qui a diviſé le corps, ou ſur la nouvelle ſurface formée par cette diviſion, dont le contour eſt la ligne courbe que nous cherchons.

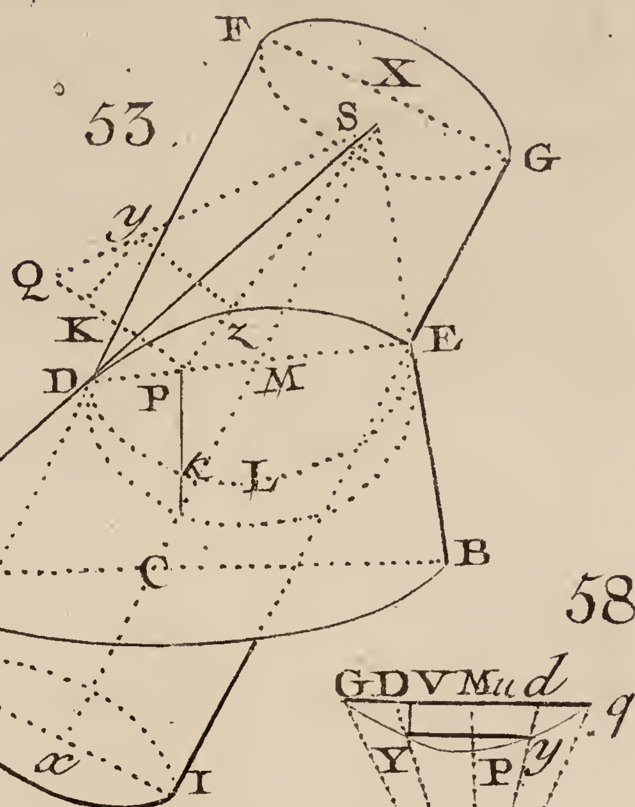
La ſeconde eſpece de ſection, qui eſt l'effet de la pénétration de deux ſurfaces courbes qui entrent l'une dans l'autre, peut être quelquefois tracée ſur une ſurface

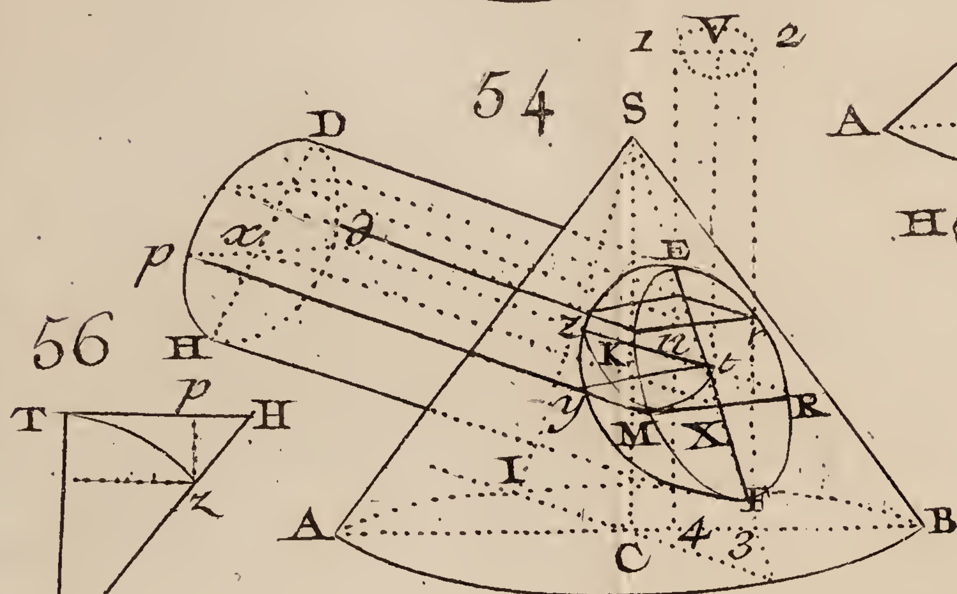
plane, comme celle des ſpheres égales ou inégales, dont la courbe d'interſection eſt toujours un cercle; mais il en eſt d'autres compoſées de deux courbures, auxquelles on peut aſſigner trois dimenſions, comme aux corps ſolides, longueur, largeur, & profondeur; celles-ci ne peuvent être décrites que ſur une ſurface concave ou convexe: nous allons traiter de l'une & de l'autre eſpece de ces courbes en particulier.

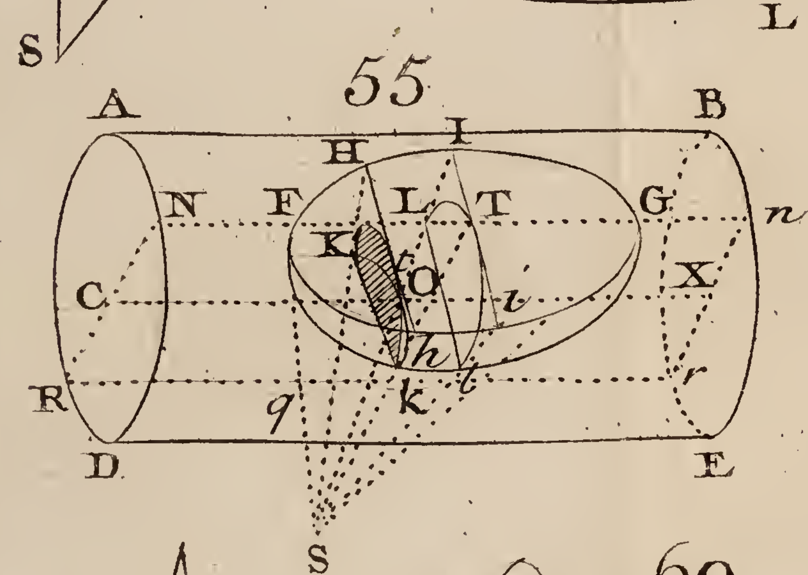


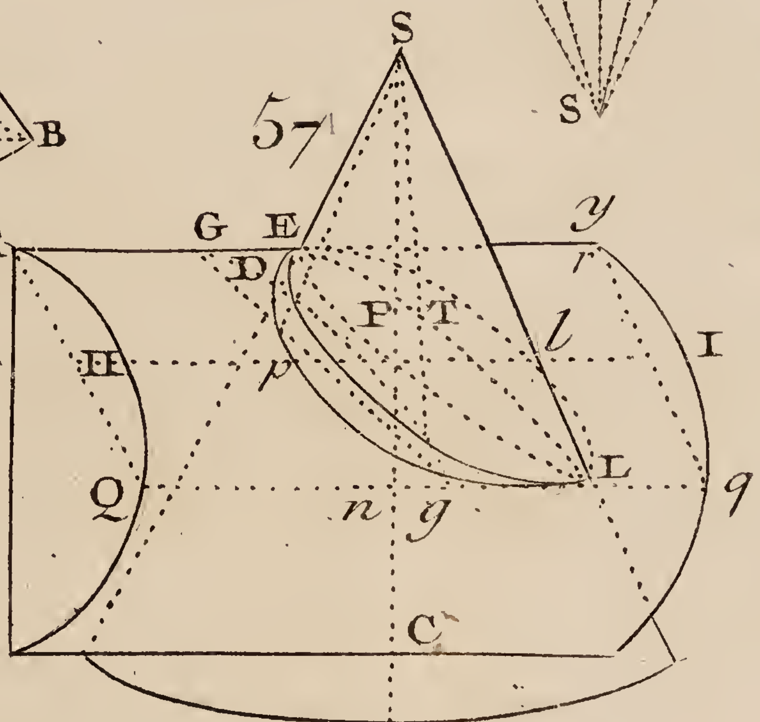

Fig. 51.

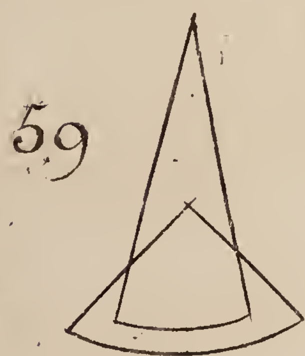
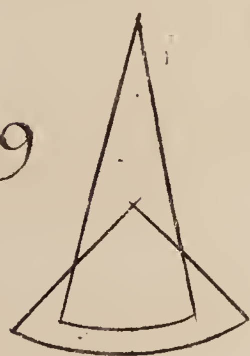

52.

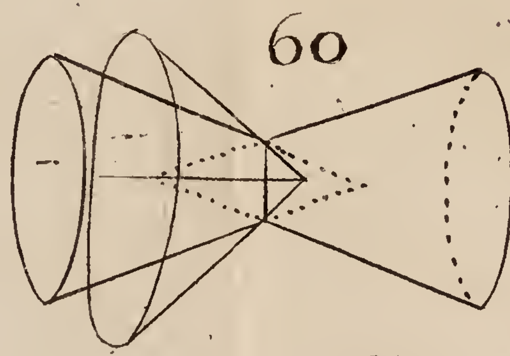

53.
F
X
S
G
y
Q
K
z
E
D
P
M
k
L
A
C
B
H
x
I

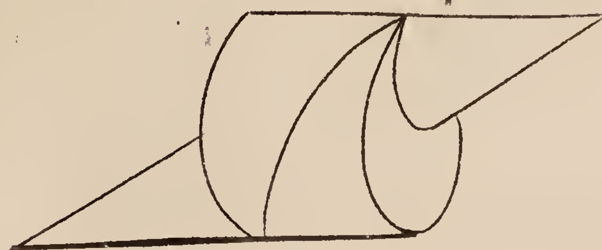

54
1 V 2
S
D
p
x
d
H
E
z
K
m
t
r
y
M
X
R
I
A
C
4
3
F
B
L
56
T
p
H
z
S

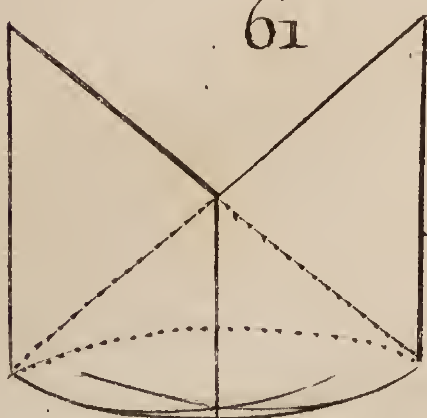

55
A
H
I
B
N
F
L
T
G
n
K
O
i
X
C
h
R
q
k
l
r
D
E
S

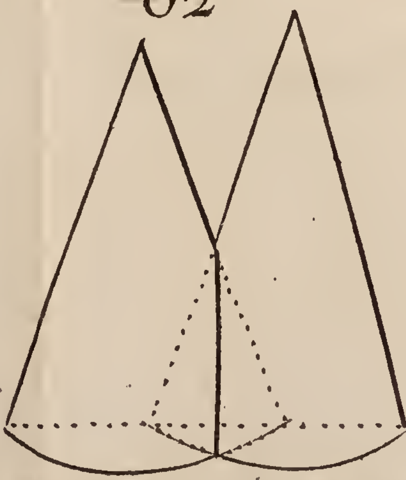

57
S
G E
D
y
R
r
P T
H
p
l
I
Q
L
q
n g
C

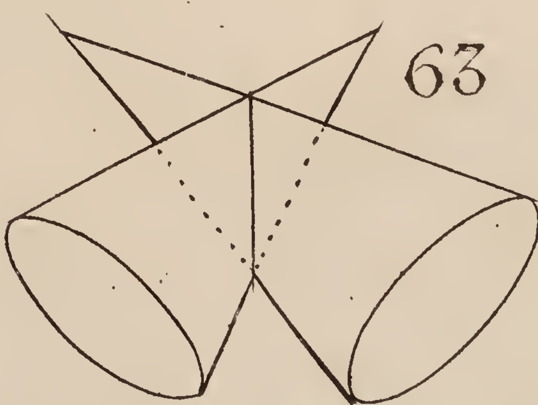


59


60


64


61


62


63

TROISIEME PARTIE.

De la description des lignes courbes planes les plus usuelles pour la coupe des pierres.

CHAPITRE I.

Des lignes courbes qui résultent de la section d'un cône.

SECTION I.

Du Cercle.

Comme nous supposons nos lecteurs initiés dans les élémens de Géométrie, qui traitent amplement du cercle, nous ne parlerons que de quelques pratiques utiles à notre Art, qu'on n'y trouve pas expressément, mais seulement par induction des propositions connues.

PROBLEME.

Par trois points donnés, tracer un arc de cercle par plusieurs points trouvés, sans connoître le diametre ni le centre, ou par un mouvement continu sans compas.

On ſçait qu'on ne peut ni déterminer, ni tracer un arc de cercle, à moins de trois points donnés, parce que par deux ſeuls points on peut faire paſſer une infinité de cercles d'inégales grandeurs.

La pratique ordinaire que les ouvriers appellent *les trois points perdus*, conſiſte à chercher le centre; mais nous ſuppoſons ici qu'on ne le peut, faute de place aſſez étendue, ou parce qu'elle eſt embarraſſée de quelque obſtacle.

Premiere méthode par pluſieurs points.

Soient les trois points donnés A, M, B diſpoſés comme on voudra les uns à l'égard des autres, pourvu qu'ils ne ſoient pas en ligne droite, parce qu'alors le centre du cercle ſeroit infiniment loin.

Premier cas. Lorſqu'un des trois eſt au milieu des deux autres; ce qui arrive très-ſouvent en architecture, où l'on détermine ordinairement les extrêmités & le milieu Fig. 65. d'un ouvrage : alors tirant une ligne droite d'une extrêmité à l'autre, & une perpendiculaire à cette ligne, paſſant par le point du milieu, on connoît la corde & la fleche de l'arc de cercle qu'on doit décrire; & ſi l'on joint ces points A, M, B par des lignes droites, on a le triangle AMB inſcrit dans l'arc de cercle qu'on cherche.

On fera avec un cordeau ou une ouverture de compas, prise à volonté du point A pour centre, l'arc F E qui coupera A M en F, & du même point A on tirera à volonté la ligne indéfinie A K entre les côtés A M & A B, laquelle coupera l'arc FE au point G; ensuite du point B pour centre, & la longueur A E pour rayon, on décrira l'arc indéfini *fe* hors du triangle AMB, & l'on portera sur cet arc la corde F G en *fg*, pour tirer par ce point *g* la ligne B*g*, qui coupera la précédente A K au point *x*, lequel sera à la circonférence de l'arc de cercle demandé A M *x* B. Par une semblable opération, on trouvera le point *h*, & tant d'autres que l'on voudra, ainsi que le point *i*, entre A & M, faisant le premier arc *no* du centre B en dedans, & son correspondant, & égal en dehors en *pq*, qui donnera le point *q*, par lequel on tirera A*q*, qui coupera B*i* en *i*, ou sera un quatrieme point de la circonférence de l'arc demandé, & avec une regle mince & pliante, fixée par des clous sur les points A, *i*, M, *h*, *x*, B, on tracera le contour du cercle demandé. C. Q. F. F.

Second cas où l'on n'a pas le point M du milieu, mais un autre en quelque endroit, comme en D.

Du point A pour centre, & de l'inter- *Fig. 66.*

valle A D pour rayon, on décrira l'arc D E pour mesure de l'angle D A E, & avec le même rayon A D, & du point B pour centre, on décrira l'arc indéfini *de*, sur lequel on prendra *ed* égal à D E, le point *d* sera le quatrieme de l'arc de cercle que l'on veut décrire A D *d*B. Pour en avoir un cinquieme ensuite, ayant tiré la ligne B D du point D pour centre, & de l'intervalle D *d* pour rayon, on fera l'arc *d* F qui coupera D B au point F, puis du point B pour centre, & avec le même rayon D *d*, on fera l'arc indéfini G *f*, sur lequel on prendra G *f* égal à *d* F; le point G sera le cinquieme de l'arc demandé. On trouvera de même le sixieme, en tirant la corde A *d*, & du centre *d* faisant l'arc D H, & du centre A, l'arc I K, &c. ainsi de suite, sur d'autres cordes tirées par des points connus.

La démonstration de ces deux pratiques est fondée sur cette proposition élémentaire d'*Euclide*, Liv. 3, p. 21, que tous les angles faits dans un même segment de cercle sont égaux entr'eux : car dans le premier cas l'angle A M B étant donné, il faut que tous les autres, appuyés sur les points A & B, dont le sommet atteint à la circonférence, lui soient égaux; par conséquent que les deux angles à la base A B qui deviennent inégaux, lorsque le sommet

eſt ailleurs qu'au point M, faſſent une ſomme de degrés égale au ſupplément à deux droits de l'angle conſtant à la circonférence, qui doit toujours avoir la même ouverture : ainſi ayant tiré à volonté une ligne A K entre les lignes A M & A B, on a diminué l'angle M A B d'un arc F G, & l'on a augmenté d'autant l'angle A B M, en lui ajoutant l'arc *fg* : donc la ſomme de ces deux angles à la baſe eſt égale au ſupplément à deux droits de l'angle donné A M B : donc l'angle A x B eſt égal à l'angle A M B. C. Q. F. F.

Dans le ſecond cas, il eſt viſible par la conſtruction, que le point D étant donné, l'angle ADB eſt à la circonférence de l'arc de cercle, & que l'on a fait, comme au premier cas, la ſomme des angles à la baſe A B égale au ſupplément à deux droits de l'angle donné A D B : car l'angle D A B, & le côté A D ayant été faits égaux, l'un à l'angle *d* B A, & l'autre au côté *d* B ſur une baſe commune A B, les deux triangles A D B, B *d* A ſont égaux entr'eux : donc le point *d* eſt à la circonférence; *ce qu'il falloit faire* pour avoir un quatrieme point de l'arc demandé : par la même raiſon les triangles D *d* A & I A *d* ſont égaux en tout : par conſéquent les angles A I *d* & *d* D A dans le même ſegment A D *d* étant égaux,

leurs ſommets I & D ſont à la circonférence. C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

De ce principe on tire une maniere fort ſimple, & facile de décrire l'arc demandé *organiquement* par un mouvement continu; il ne s'agit que de faire avec deux regles égales, chacune à la corde AB, un angle AMB ou ADB égal à celui qui eſt donné dans le ſegment, dont on fixera l'ouverture par une écharpe PR; puis ayant planté deux clous ou chevilles ſaillantes L, I aux deux extrêmités de l'arc AB ſur la place où on doit le décrire, on fera mouvoir le ſommet M ou D de cet angle, en appuyant ſes branches, & les faiſant couler le long des clous L, I à droite & à gauche, après avoir attaché un crayon ou une pointe au ſommet de l'angle M ou D; ce crayon, par le mouvement de rotation, décrira l'arc de cercle que l'on cherche.

Fig. 67.

USAGE.

Ce problême eſt extrêmement utile en pluſieurs circonſtances de l'architecture militaire: par exemple, à tracer les arcs d'arrondiſſement des contreſcarpes devant des angles flanqués obtus, où le centre eſt occupé & enfermé par les revêtemens des eſcarpes.

SECTION II.

De la description de l'Ellipse.

Nous avons dit que la ſection plane d'un cylindre, coupé obliquement à ſon axe, étoit une ellipſe : par conſéquent les faces obliques des berceaux en plein ceintre, & les berceaux ſurmontés & ſurbaiſſés ſont elliptiques ; d'où il ſuit que l'on a très-ſouvent occaſion de tracer cette eſpece de ligne courbe.

PROBLEME I.

Décrire par pluſieurs points tant d'ellipſes que l'on voudra, qui ſoient toutes des ſections obliques d'un même cylindre (ou en termes de l'Art) *faire des cerches ralongées du plein ceintre.*

Soit ABED la ſection d'un cylindre par l'axe XC, il eſt clair par la définition du cylindre *droit*, que toutes les ſections perpendiculaires à l'axe ſont des cercles égaux : il n'en eſt pas de même des ſections planes obliques ; elles ſont toutes inégales, ſuivant le plus ou le moins d'obliquité de la ſection, comme il paroît par la différence des longueurs des diametres BF, BG, BD, ſur leſquels, en portant les ordonnées au *Fig. 69.*

diametre du cercle, on a des ellipſes plus ou moins alongées, comme on va le montrer par une pratique très-ſimple, qui donne tout d'un coup les diviſions proportionnelles des abſciſſes de toutes ces différentes obliquités : il ſuffira, pour l'exemple, de tracer un quart de ces figures.

Fig. 69. Soit A M C le quart de cercle, qui eſt la baſe du cylindre droit, & le parallélogramme A C X D celui de la ſection par l'axe C X du cylindre : ſoient auſſi les lignes C F, C D les profils des plans perpendiculaires à ce parallélogramme, & obliques à l'axe C X, ſuivant les directions C F, C D.

On tirera ſur le rayon A C du quart de cercle autant de perpendiculaires que l'on voudra, prolongées juſqu'à la baſe D X qui couperont les lignes C F, C D aux points S, V, proportionnellement aux diviſions du rayon A C. Si ſur chacune de ces diviſions on place perpendiculairement les ordonnées correſpondantes du quart de cercle, on aura celles des ellipſes, qui ſont des ralongemens de ce cercle, leſquelles étant plus écartées les unes des autres, donnent des quarts d'ellipſes inégalement alongées; ſçavoir F *g h* I, peu différente du contour du quart de cercle A O M, & D L *l* M qui l'eſt davantage; ce que la figure montre ſenſiblement.

D'où il ſuit que ſi le demi-diametre ou moitié du grand axe eſt donné de longueur, comme CD, ayant ouvert le compas de cette longueur, & poſé une des pointes en C, on fera avec l'autre un arc qui coupera la perpendiculaire AD en un point, comme D; de ſorte que ſi l'on mene une ligne droite par les points C & D, elle ſera coupée par toutes les ordonnées du quart de cercle, prolongées aux points D, *v*, V, *u*, C, ſur leſquels poſant les ordonnées correſpondantes dans le quart de cercle *or*, OR, *or*, on aura à leurs ſommets les points *l*, L, *l*, M, par leſquels on tracera le contour de l'ellipſe par le moyen d'une regle pliante, comme nous l'avons dit ci-devant pour le cercle. C. Q. F. F.

USAGE.

On peut dire qu'il n'eſt point de trait de pratique plus uſuelle que celui-ci, qu'on appelle la *cerche ralongée*, parce que les voûtes en berceaux cylindriques étant les plus ordinaires dans les édifices, les obliquités qui ſe rencontrent aux faces, ou l'exhauſſement, ou le ſurbaiſſement du contour de leurs ceintres, ſont des ellipſes aſſujetties au contour de leurs ceintres circulaires, ſoit dans les cylindres *droits*, coupés obliquement, ſoit dans les cylindres

ſcalenes qui ne ſont pas coupés par des plans paralleles à leur baſe circulaire : ainſi les ellipſes ſe trouvent partout où il y a de l'obliquité à l'axe, ou à l'égard de la baſe.

PROBLEME II.

Les axes d'une ellipſe étant donnés, la tracer par un mouvement continu.

Fig. 70. On peut tracer une ellipſe de pluſieurs manieres par un mouvement continu, 1°. avec un cordeau, 2°. ou avec un inſtrument fait exprès.

Par le moyen d'un cordeau, les deux axes AB, DE étant donnés, & mis dans leur ſituation à angle droit, au milieu en C, on portera la longueur du demi-grand axe AC, ou BC comme un rayon de cercle poſé en D pour centre, d'où l'on tracera un arc *gh* qui coupera l'axe AB en F vers A, & en *f* vers B ; ces deux points F & *f* ſont les *foyers* dans leſquels on plantera deux clous ou deux chevilles pour y attacher les bouts d'un cordeau qui ſera exactement égal à la longueur AB du grand axe ; puis mettant un crayon ou une pointe dans le pli que ce cordeau lâche fera, étant tendu en I, D, K, L, E, &c. on fera couler ce crayon dans le pli, en tournant de A en D en deſſus, & E en deſſous : on aura cette

ellipſe parfaite, que les ouvriers appellent, lorſqu'elle eſt ainſi décrite, *le trait du Jardinier*.

Il faudra ſeulement obſerver de tirer toujours également ſur le piquet ou crayon qui doit couler dans le pli, afin que le cordeau ne s'alonge pas plus dans un endroit que dans l'autre, afin que le contour ſoit toujours uniforme, comme il doit être, ne faiſant point de ces ondulations, qu'on appelle des *jarrets*.

Lorſque l'ellipſe eſt un peu grande, il eſt aſſez difficile d'obſerver cette tenſion du cordeau, auſſi exactement qu'il le faut, pour éviter toute irrégularité; c'eſt pourquoi on préfere à cette méthode celle des inſtrumens de bois qui ne peuvent s'alonger ni ſe raccourcir: il y en a de différentes façons, dont le plus commun eſt celui qu'on appelle *compas à ovale*, qui conſiſte en une double équerre, dont j'ai donné la deſcription dans le ſecond Livre de ma Stéréotomie, & qui eſt connu de tout le monde; mais comme il en eſt un plus ſimple, qui ne conſiſte qu'en une regle briſée, pliant ſur un pivot, nous le propoſerons ici comme moins compoſé, & de plus prompte exécution.

Seconde maniere avec un inſtrument très-ſimple; & par un mouvement continu.

Ayant porté le demi-petit axe CD ſur le grand axe en C*d*, on aura leur différence en A*d*, qu'on diviſera en deux également en *m*, ou leur ſomme *d*B en M ; on aſſemblera deux regles égales, chacune à la moitié de la ſomme MB, par le moyen d'une cheville ou d'un clou arrondi, comme CG, GH en G, ou bien deux regles d'inégale longueur, l'une C*n* égale à la différence A*m* des deux demi-axes, l'autre *na* égale au demi-grand axe AC : puis ayant pris une troiſieme regle égale à quatre fois CG ou deux fois *d*B, pour la premiere conſtruction, avec les regles CG, GH, ou ſeulement au grand axe AB pour la ſeconde, on attachera au milieu C la regle CG, ou bien C*n*, par un pivot, dont le milieu ſoit ſur un des côtés de la grande regle, dans l'arête de ſon alignement.

Fig. 71.

On portera enſuite ſur la branche GH la longueur A*m* en G*x* pour y poſer un crayon ou une pointe propre à tracer le contour de l'ellipſe, ou ſur la regle *na* en *nr*, pour y poſer une cheville ou un clou arrondi, propre à s'appuyer & couler le long de la grande regle, pendant que le crayon poſé à l'extrêmité *a* tracera le contour de l'ellipſe, la regle *an* tournant ſur un pivot *n*, & *n*C ſur le centre C : c'eſt ainſi qu'en fermant ou en ouvrant l'angle CGH, le

crayon x tracera le contour de l'ellipſe, ainſi qu'il paroît par la grande ouverture ponctuée Cgh, le point x ſuivant toujours la circonférence de cette courbe.

La démonſtration de cette opération eſt à la page 137 & 138, Livre II, du premier tome de ma Stéréotomie, édition de Straſbourg, & 164 de l'édit. de Paris; nous ne la mettons pas ici pour abréger, parce qu'elle ſuppoſe une nouvelle figure.

Comme les axes ne ſont pas toujours donnés, mais ſeulement des diametres conjugués, il eſt à propos de montrer l'uſage qu'on en peut faire.

PROBLEME III.

Deux diametres conjugués qui ne ſont pas les axes étant donnés, tracer une ellipſe par pluſieurs points, ou par un mouvement continu, ſans connoître les axes ni les foyers.

Soient donnés les deux diametres conjugués AB, DE, on menera par le point D une ligne DT parallele à AB, & par le centre C de leur interſection une perpendiculaire CF à la ligne DT. *Fig. 72.*

Du point C pour centre, & CF pour rayon, on décrira un quart de cercle HF, & du même point C, & de l'intervalle CB pour rayon un autre quart GB, oppoſé au

premier au ſommet; on les diviſera l'un & l'autre en un même nombre de parties égales, par exemple, chacun en quatre aux points 1, 2, 3; par leſquels on menera des paralleles indéfinies, d'un côté au diametre AB, comme Kk, Ll, Mm, & de l'autre à la perpendiculaire GF, comme $1r$, $2r$, 3R, qui couperont le diametre AB aux points r, r, R, par où on menera des paralleles au diametre DE, qui couperont les paralleles à ſon conjugué AB aux points x, y, z, par leſquels on tracera avec une regle pliante le contour du quart de l'ellipſe DB d'un côté, & pour avoir leurs correſpondans à l'autre quart AD, on portera ſur chacune des paralleles à AB les longueurs ox, oy, oz en OK, OL & OM, pour avoir la demi-ellipſe ADB; & ſon oppoſé en deſſous, s'il étoit néceſſaire, où la partie renflée, qui eſt ici en haut, ſe trouveroit renverſée en bas de E en B.

Démonſtration. A cauſe des paralleles au
Fig. 72. diametre AB, & des diviſions des quarts de cercle proportionnelles à la grandeur de leurs rayons, de même que celles des lignes CF & CD; on aura CD : CO :: CG : CS, & CD : CP :: CG : CV; enfin CD : Cq :: CG : Cu; mais Co = Rz, CP = ry, & Cq = rx; & par la même raiſon R3 = CS, $r2$ = CV, & $r1$ = Cu: donc Rz : ry ::

R3

R3 : r2, c'eſt-à-dire que les ordonnées au diametre du cercle, & celles qui le ſont au diametre de l'ellipſe, ſont en même raiſon entr'elles ; ce qui eſt une propriété de l'ellipſe qu'il falloit décrire.

Le même problême ſe réſout d'une différente façon qui fournit une maniere de *tracer l'ellipſe ſur des diametres conjugués par un mouvement continu.*

Soient les diametres A B, D E donnés de longueur & de poſition reſpective, c'eſt-à-dire faiſant entr'eux un angle donné. Par l'extrêmité D on menera une perpendiculaire D P ſur le diametre A B, & qu'on prolongera vers C pour y porter la longueur A C. *Fig. 73.*

Du point G ayant tiré au centre C la ligne G C, on prendra ſur C D un point H à volonté ; d'où l'on tirera une parallele à P G, qui coupera CG au point I, & une autre indéfinie K L, parallele au diametre A B. Si du point I pour centre & pour rayon D G ou A C, on fait un arc de cercle qui coupe K H en K & L, je dis que les points K & L ſont à la circonférence de l'ellipſe A D B E ; ce qui eſt démontré dans ma Stéréotomie, Livre II, problême 8 ; d'où je tire la pratique annoncée de tracer l'ellipſe ſur des diametres conjugués, donnés par un mouvement continu.

On diſpoſera deux regles, de maniere qu'elles faſſent entr'elles un angle égal à l'angle trouvé par cette conſtruction GCP, mettant une cheville en P & en G aſſez ſaillante pour pouvoir y appuyer les regles GC & CB; puis on mettra un crayon au trou D pour ſervir à tracer l'ellipſe.

Fig. 73.

Si l'on fait mouvoir la regle GP en l'inclinant, & faiſant couler la cheville G le long de la regle GC, & la cheville P le long de la regle CB, mobiles entr'elles ſur le point C, comme les bras d'une fauſſe équerre, le crayon D tracera le quart d'ellipſe DLB; & ſi on en fait de même de l'autre côté de la regle GC, tranſportant la regle, par exemple en FI, du côté de l'angle obtus DCA ou DCF, le point D du crayon tombera ſur le point K, parce que la partie DC prend ſa poſition en IK, partie de la longueur IF = GP, & tracera par ſon mouvement l'autre quart d'ellipſe DKA, qui fera, avec le quart précédent, la demi-ellipſe ADB; ce qui étoit propoſé de faire organiquement par un mouvement continu, ſans connoître ni les axes ni les foyers.

USAGE.

Ce problême eſt néceſſaire pour tracer les *arcs rampans* & les projections de faces de berceaux elliptiques & en talud, dont

on ne donne ordinairement que les diametres conjugués : on peut cependant, si l'on veut, en trouver les axes par le problême suivant.

PROBLEME IV.

Les diametres conjugués étant donnés, trouver les axes.

Tout étant disposé, comme dans la figure du problême précédent, où A B & D E sont les diametres conjugués donnés, la ligne G P passant par D, perpendiculaire sur AB, & D G ayant été fait égal à CA, & la ligne GC tirée au centre C, on divisera cette ligne en deux également en *m*, par où & par le point D, ayant tiré l'indéfinie *mg*, sur laquelle on portera la longueur *m* G en *mg*. Si du point *g* on tire une indéfinie par le centre C, on aura la position du grand axe, dont on déterminera la longueur en portant de part & d'autre du centre C la somme de deux lignes C*m* & *m* D, laquelle donnera les extrêmités X & *x* de ce grand axe. *Fig. 74.*

Présentement si on lui fait une perpendiculaire par le point C, & qu'on porte au dessus & au dessous la longueur D *g*, on aura les points *y* & Y pour les extrêmités du petit axe *y* Y, conjugué au grand *x* X C. Q. F. F.

DEMONSTRATION.

Du point C pour centre, & pour rayon C x, on décrira un quart de cercle Q x, & l'on menera par le point D, extrêmité d'un des diametres donnés, une ligne KO perpendiculaire à C x, & par le même, D n parallele à C x, & nr parallele à DO.

Par la ſuppoſition, le point D eſt à la circonférence de l'ellipſe, puiſqu'il eſt à l'extrêmité d'un des diametres donnés; il faut démontrer que les points x & y ſont à la même circonférence.

Puiſque m G $=$ m C (*par la conſtruction*), mn ſera égal à m D, & n C $=$ D g $=$ C y (*conſtr.*); mais à cauſe des triangles ſemblables CKO, C nr, on aura KO : DO $= nr$: : CK $=$ C x $=$ CQ : C n $=$ D g $=$ C y: donc les ordonnées au cercle KO : QC, ſont proportionnelles à celles de l'ellipſe DO & y C, propriété de l'ellipſe.

Donc les points x, y étant les extrêmités des deux perpendiculaires x X & y Y ſont celles des deux axes conjugués de la même ellipſe, dont les lignes AB, DE ſont les diametres conjugués. C. Q. F. F.

De l'Ellipse considérée comme faite.

PROBLEME V.

Trouver, 1°. *le centre*, 2°. *les diametres conjugués*, 3°. *les axes*, 4°. *les foyers d'une ellipse donnée* ADBE.

Ayant tiré à volonté une ligne quelconque dans l'ellipse, terminée de part & d'autre à sa circonférence, comme *or*, on lui menera une parallele à une distance, prise à volonté, comme OR; on les divisera chacune en deux également en M & *m*, par lesquels on tirera la droite AB, qui sera un diametre. Fig. 75.

1°. Le milieu C de cette ligne sea le centre de l'ellipse.

2°. Si par ce milieu C on mene une parallele DE aux deux premieres *or*, elle sera un autre diametre, qu'on appelle *conjugué* au précédent AB.

3°. Ces deux diametres étant donnés, on trouvera les axes par le problême précédent.

4°. Par le problême 2, on trouvera les deux foyers; ce qui étoit proposé, & qui n'a pas besoin de démonstration particuliere, une partie étant tirée de ces définitions, & de ce que 1°. toutes les lignes qui passent par le centre sont des *diametres*.

2°. Que le point qui eſt au milieu de tous les diametres poſſibles eſt le *centre.*

3°. Que les lignes paralleles entr'elles, qui ſont coupées en deux également par un diametre qui les traverſe, ſont des *ordonnées* à ce diametre.

4°. Que la plus grande de toutes ces ordonnées, qui paſſe par le centre, eſt un diametre qu'on appelle *conjugué* au premier.

5°. Que les deux diametres inégaux, qui ſont perpendiculaires l'un à l'autre, s'appellent *grand* & *petit axe.*

6°. Que les points pris dans le grand axe à une certaine diſtance du centre, d'où les lignes tirées à un même point de la circonférence, font enſemble une longueur égale au grand axe, s'appellent *foyers.*

PROBLEME VI.

Par un point donné à la circonférence de l'ellipſe ou hors de l'ellipſe, lui tirer une tangente.

Fig. 76. Si le point étoit donné à l'extrêmité d'un diametre quelconque, & qu'on eût ſon conjugué ou une ordonnée, il n'y auroit qu'à lui mener une parallele par ce point, elle ſeroit tangente à l'ellipſe.

Si le point donné eſt à la circonférence, on peut réſoudre ce problême de deux façons.

Premiérement en cherchant les foyers, si l'on connoît les axes, comme nous l'avons dit au probl. 2; & si on ne les connoît pas, on les cherchera par le problême précédent.

Soient ces foyers en F & *f*, & le point donné en D, on tirera les lignes F D, *f* D qui feront entr'elles l'angle F D *f*: si on le divise en deux également par la ligne D *m*, & qu'on lui tire par D la perpendiculaire T N, cette ligne sera la tangente demandée T D N. *Fig. 76.*

Autrement soit *d* le point donné, ayant tiré du foyer F par ce point une ligne F G égale au grand axe, on tirera de l'autre foyer la ligne *f* G, qu'on divisera en deux également en H, la ligne tirée de H par *d* sera la tangente demandée.

2°. Si l'on n'a ni le grand axe ni les foyers, on menera par le centre C & le point donné D, le diametre D A, & un autre à volonté, comme B E: par une de ses extrêmités on menera B F parallele à D A, qui rencontrera la circonférence de l'ellipse en F, d'où l'on tirera F E, qui sera une ordonnée au diametre D A, à laquelle, si on tire par le point D une parallele D *t*, cette ligne sera la tangente demandée. *Fig. 76.*

Si le point donné est hors de l'ellipse, comme en *d*, ayant mené par le centre C

la ligne dC & CG perpendiculaire à Cd, & égale à CI, interſection de la circonférence, & de la ligne Cd on tirera dG, à laquelle on menera la perpendiculaire GK qui coupera dC prolongée en K, on portera la longueur CK en CL ſur la ligne Cd, enſuite on menera une ordonnée quelconque au diametre IM, en faiſant à volonté une parallele No à ce diametre, qu'on diviſera en deux également en p, par où on tirera pC, à laquelle on fera une parallele Lt, qui coupera la circonférence en t, où ſera le point d'attouchement d'une ligne dt, qui ſera la tangente demandée. Si l'on prolonge tL en T, le point T ſera celui de l'attouchement de la ligne dT du côté oppoſé.

Démonſtration pour la premiere ſolution.

Il eſt démontré dans les ſections coniques, que les angles FDT, fDN ſont égaux entr'eux, ſi l'on ajoute de part & d'autre les angles FDm, fDm égaux par la conſtruction, les angles mDT, mDN le feront auſſi, & par conſéquent droits : donc TN ſera tangente de l'ellipſe au point D. C. Q. F. F.

Pour la ſeconde ſolution, à cauſe des paralleles BF & DA, on aura EC : CB :: ES : SF; mais EC, demi-diametre, eſt

égal à CB : donc ES = SF, & par conséquent EF est une ordonnée au diametre DA, à laquelle DT étant parallele (par la construction) est une tangente qu'il falloit tracer.

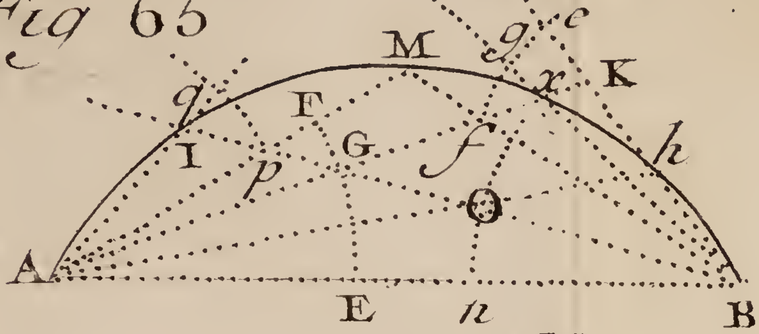
Pour la troisieme solution, on voit par la construction de l'angle droit *d*GK : que CG étant égal à CI, & perpendiculaire à *d*C, la ligne CK est une troisieme proportionnelle aux distances C*d*, CI, laquelle CK ayant été portée en CL, on aura C*d* : CI :: CI : CL ; ce qui est une propriété des soutangentes, comme il est démontré dans les traités des sections coniques, non seulement pour l'ellipse, mais encore pour l'hyperbole.

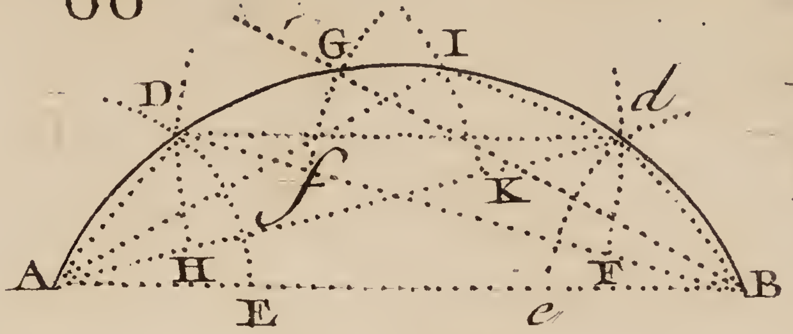
USAGE.

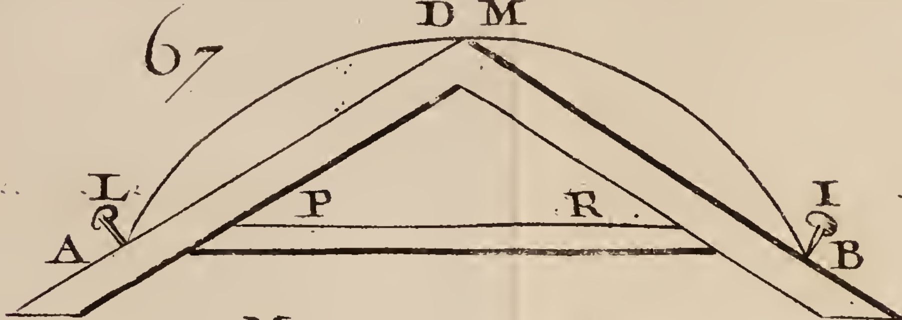
Cette proposition, qui ne paroît d'abord qu'une pure curiosité, est une des plus nécessaires dans la pratique de l'architecture & de la coupe des pierres, où il s'agit de voûtes ou de contours de plans elliptiques, parce que, pour faire les joints des voûtes de cette espece, suivant la grande regle, qui veut qu'on fasse les arêtes des pierres de force égale de part & d'autre du joint, il faut faire la même opération que pour trouver les tangentes, qui doivent en effet être perpendiculaires à ces joints, & réci-

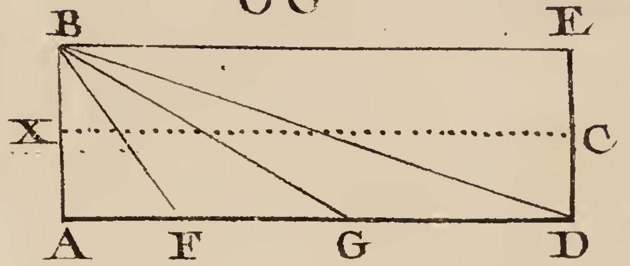
proquement ; de ſorte qu'ayant tracé une tangente à un point donné d'une courbe quelconque, il ne s'agit plus que de lui mener une ligne perpendiculaire par ce point, de quelque eſpece que ſoit cette courbe, elliptique, parabolique, hyperbolique, cycloïde, &c. pour déterminer géométriquement la poſition du joint entre deux vouſſoirs.

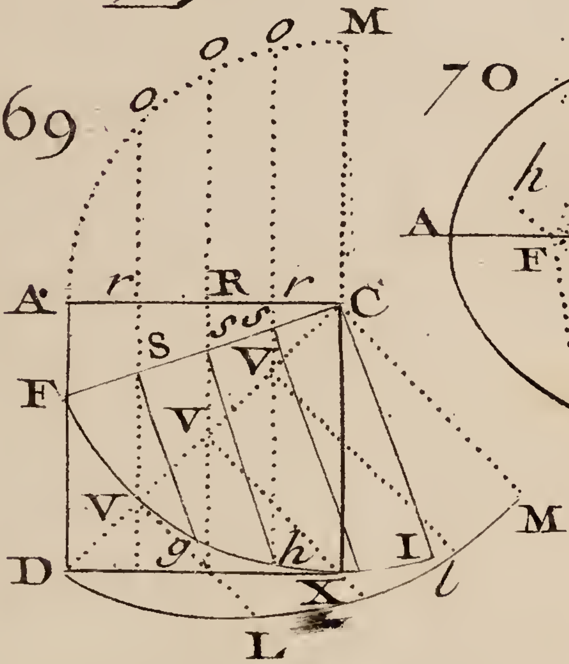
Cette propoſition ſert de plus à joindre une portion d'ellipſe à une ligne droite, de maniere qu'à cette jonction il ne ſe forme point de *jarret*, mais une tranſition inſenſible de l'une de ces lignes à l'autre ; ce qui eſt d'uſage en pluſieurs circonſtances de deſſeins d'architecture, ſurtout ſuivant la mode de ce tems, où les ſallons, veſtibules, & autres pieces d'appartemens, ſont arrondis de différentes courbes circulaires & elliptiques, tournées en ſens contraire du concave au convexe, qu'on ne peut joindre ſans jarrets, qu'en les aſſemblant à l'attouchement d'une tangente commune au dedans & au dehors.

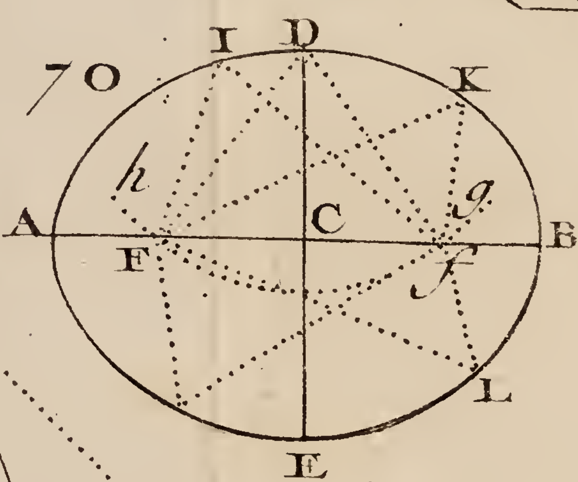

Fig 65

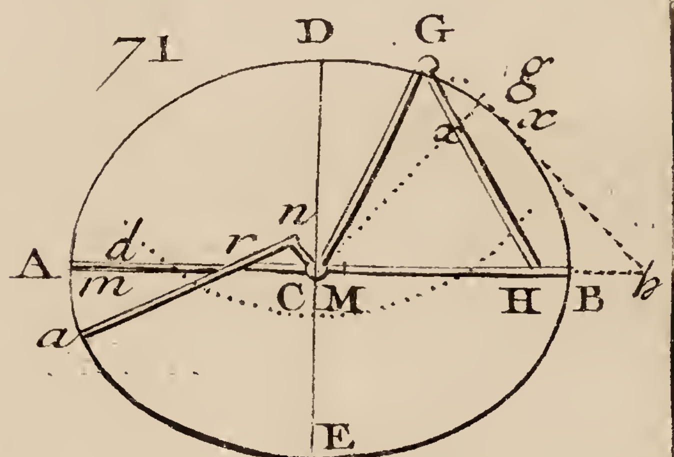

66

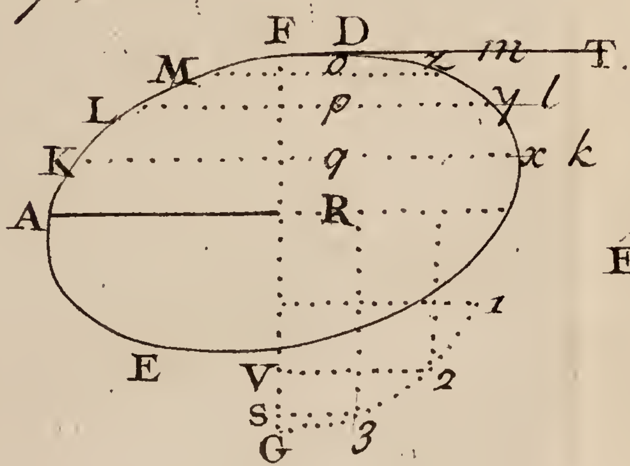

67

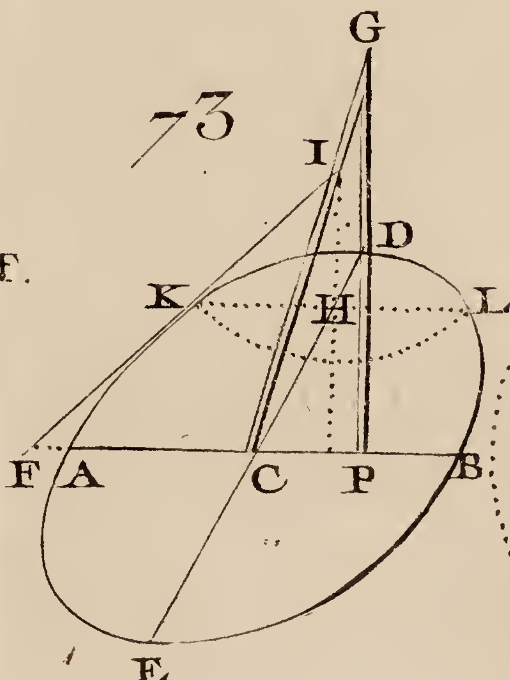

68

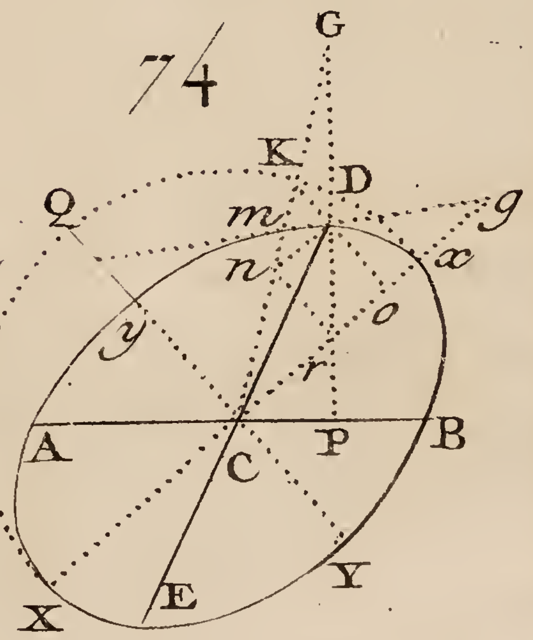

69

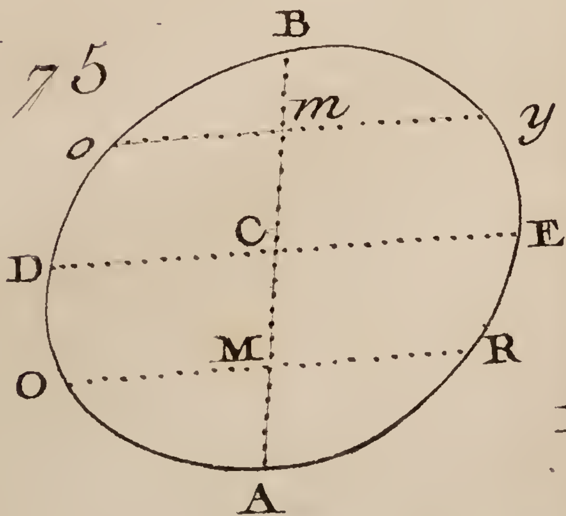

70

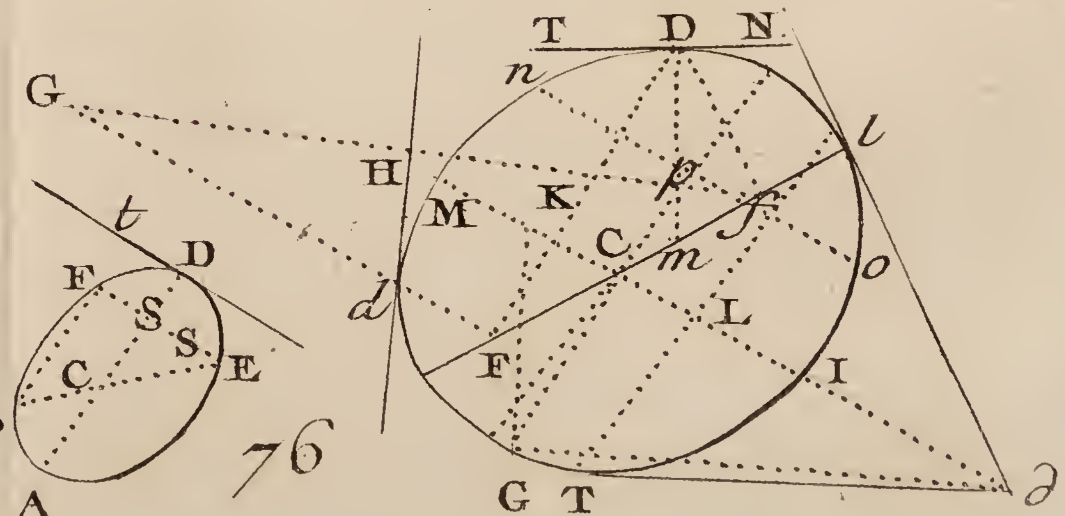

71


72


73


74


75


76

SECTION III.

De la deſcription de la Parabole.

PROBLEME I.

L'axe d'une parabole & un point à ſa circonférence étant donnés, la décrire par pluſieurs points, ou par un mouvement continu.

Soit S4 l'axe de la parabole à tracer, & le point D ou *d* donné à ſa circonférence, on en demande tant qu'il ſera néceſſaire pour en déterminer le contour. Fig. 77.

Ayant tiré du ſommet S de l'axe au point donné D une ligne SD, on lui fera une perpendiculaire D4 qui coupera l'axe au point 4, & du même point D une autre perpendiculaire DO à l'axe S4, la longueur O4 doit être conſidérée comme une ligne de remarque, qu'on appelle le *parametre*. On la diviſera en quatre parties égales, dont on en portera une au deſſous du ſommet S de l'axe en F, pour déterminer le point appellé le *foyer*, & une autre en deſſus ſur l'axe prolongé au point R, par lequel doit paſſer une ligne A B perpendiculaire à l'axe, qn'on appelle la *directrice*.

Cette préparation étant faite, on tirera à volonté autant de perpendiculaires à l'axe qu'on voudra avoir de points à la circonfé-

rence de la parabole de part & d'autre de l'axe, comme xy, XY, dD qui couperont cet axe aux points O, M, m, n. Si l'on prend les intervalles Ro, RM, Rn pour rayons, & le point F pour centre, commun des arcs yi, yi, &c. qui couperont les paralleles xy, XY, dD aux points x & y, X & Y, d & D, tous ces points seront à la circonférence de la parabole demandée, secondement par un mouvement continu.

Ayant tiré cette perpendiculaire à l'axe par le point R, qu'on appelle la *directrice*, parce qu'elle sert à diriger l'instrument, qui n'est autre chose qu'une équerre ordinaire EQU,

On posera une regle sur la directrice AB, à laquelle on appliquera une des branches de l'équerre qu'on fera couler le long de cette regle, après avoir attaché au bout E de cette équerre le bout d'un cordeau égal à la distance OR, & l'autre fixé au foyer F; alors ayant posé cette branche de l'équerre EQ sur l'axe SO, on appuyera le cordeau contre cette branche avec une pointe de clou mobile, ou un crayon pour tracer la courbe, & l'on reculera doucement l'équerre le long de la ligne RA pour un côté, en l'écartant de l'axe, l'autre branche coulant toujours le long de

la regle ; le crayon mis & tenu dans le pli mobile du cordeau F P E, tracera par ſon mouvement la ligne courbe S P D d'un côté de l'axe, & S*y d* de l'autre, en retournant l'équerre ſur le côté R B de la directrice; cette courbe eſt la parabole demandée.

La démonſtration de cette conſtruction dépend des principes des ſections coniques, ſur leſquels il ne nous convient pas ici de nous arrêter, pour le peu d'uſage que nous avons à faire de cette courbe, d'autant plus qu'elle eſt connue de tous ceux qui ont les premiers élémens des ces Sections.

USAGE.

On trouve rarement occaſion de décrire la parabole dans la coupe des pierres : elle ne ſert qu'à tracer les arcs de face des *trompes* quarrées pardevant dans un angle droit. L'axe, qui eſt la ligne du milieu, de niveau à l'impoſte eſt donné, & la rencontre du milieu de la trompe avec l'à-plomb au bout de cette ligne, eſt le point donné au contour de la parabole.

Cette courbe peut auſſi être employée à tracer un arc rampant dans certaines circonſtances, où les pieds droits ſont en ſurplomb ; ce qui arrive très-rarement : au cas qu'on en faſſe uſage, il eſt néceſſaire

de ſçavoir donner aux joints de tête des faces l'inclinaiſon qu'ils doivent avoir pour être réguliers ; ce qui dépend du problême ſuivant.

PROBLEME II.

Par un point donné à la circonférence d'une parabole, lui tirer une tangente.

Le foyer F étant connu par le problême précédent, on tirera au point donné D la ligne F D qu'on prolongera vers E, enſuite on menera par le point D une parallele G H à l'axe S O, laquelle ſera avec la précédente F E l'angle E D G, qu'on diviſera en deux également par une ligne D M, qui ſera la direction d'un joint de tête d'appareil, parce que la ligne qui lui ſera perpendiculaire par le point D, ſera la tangente de la parabole, comme il eſt démontré dans tous les traités des ſections coniques, même les plus anciens, comme *Appollonius*, Livre I, page 33.

Nous avons indiqué l'uſage de ce problême en même tems que nous en avons donné la conſtruction.

Il peut encore ſervir à la jonction d'une partie de cette courbe avec une ligne droite ou une autre courbe, dont on a auſſi la tangente, comme nous l'avons dit à l'égard de l'ellipſe.

SECTION IV.

De la description de l'Hyperbole.

PROBLEME I.

Les deux axes & un point à la circonférence étant donnés, tracer l'hyperbole par plusieurs points, ou par un mouvement continu.

Soit ANB la section triangulaire par l'axe d'un cône donné, à laquelle on suppose un autre plan qui la coupe perpendiculairement au premier, & parallélement à l'axe. Il en résultera une figure d'hyperbole, dont on a trois points donnés, sçavoir le sommet S, & deux extrêmités d'ordonnées à l'axe, qui seront les mêmes que celles du cercle de la base du cône A*o*B, par lesquelles passe le plan coupant; telle est R*d* dans le demi-cercle A*d*B. *Fig.* 78.

Mais ce n'est pas assez de trois points pour déterminer une section conique, il en faut cinq pour toute autre que le cercle: or nous aurons ici d'autres données, en prolongeant les lignes RS & BN, jusqu'à ce qu'elles concourent en Q; alors on a la longueur SQ pour le premier axe, dont le milieu C est le centre de l'hyperbole, & la distance CN dans la supposition de la section parallele à la prolongation du grand

axe, sera la moitié du second axe, par le moyen duquel on trouve facilement les foyers comme il suit.

On tirera S*g* parallele à CN, qui coupera NX parallele à l'axe au point *g*; si l'on prend la longueur de la diagonale C*g*, & qu'on la porte sur l'axe en CF, on aura le point F pour un des foyers; puis en portant la même distance au dessus de C en *f*, on aura le second foyer *f*. Si enfin on prolonge la diagonale C*g* vers *t* d'un côté, & CG vers T de l'autre, on aura ces lignes, qu'on appelle *asymptotes*; alors on a tout ce qui est nécessaire pour décrire l'hyperbole par plusieurs points, ou par un mouvement continu, comme on va le dire.

Premierement par plusieurs points.

Fig. 79. D'une ouverture de compas, prise à volonté, pourvu qu'elle soit plus grande que *fs* pour rayon, & du point *f* pour centre, on tracera un arc en E*e*, on portera le même intervalle de Q en *o* sur l'axe prolongé, & l'on prendra la différence *os* de cet intervalle & du premier axe Q*s*, de laquelle différence pour rayon, & du foyer F pour centre, on décrira un arc qui coupera le précédent E*e* au point *h*, lequel sera à la circonférence de l'hyperbole.

On cherchera de même autant de points que l'on voudra de cette courbe.

Seconde

Seconde maniere par un mouvement continu.

Ayant pris une regle fK qui excede la plus grande diſtance du foyer au point donné D le plus éloigné, on la percera d'un trou au point f pour y paſſer un clou arrondi ou une cheville, autour de laquelle elle puiſſe tourner. On portera ſur cette regle la longueur Qs du premier axe de f en P : enſuite on prendra un cordeau de la longueur PD, dont on attachera un bout à l'autre foyer F; puis poſant la regle fK ſur fO, on tendra le cordeau, qui eſt lâche, en le tirant par un pli de F en S, le long de la regle, & en l'écartant par le bout K; l'autre bout reſtant fixe en f, on appuyera ſur le pli du cordeau avec une pointe de clou ou un crayon contre la regle, en la faiſant tourner vers D, & l'on tracera ainſi l'hyperbole à peu près comme on a fait pour la parabole. *Fig. 78.*

Il eſt clair que cette deſcription organique eſt la même que la précédente par pluſieurs points, pour peu qu'on y faſſe attention. *Deſcartes* dans ſa Géométrie établit cette génération de l'hyperbole, auſſi bien que les précédentes de l'ellipſe & de la parabole, pour ſervir de baſe à tous les raiſonnemens géométriques des propriétés qu'il en déduit.

Fig. 78. Lorſqu'on connoît les lignes C T & C t, qu'on appelle *aſymptotes*, tirées par le centre C & les points G & g, éloignés du ſommet S de l'intervalle de la moitié C N du ſecond axe n N, on peut, avec la ſeule poſition d'un point à la circonférence de la courbe, en trouver autant qu'on voudra.

Soit donné, par exemple, le point D, on tirera par ce point & d'une direction, priſe à volonté, une droite, par exemple I V, qui coupe les deux aſymptotes en V & I, on portera l'intervalle D V de I en x ſur cette ligne ; le point x ſera à la circonférence de l'hyperbole. Si du même point x on tire une autre ligne avec la même condition, comme L l, qui coupera les aſymptotes en L & l, on portera la longueur x L en $l y$, le point y ſera un troiſieme point de cette courbe, ainſi du reſte.

Cette propriété démontre un paradoxe, que les aſymptotes approchent toujours de l'hyperbole, & ne peuvent jamais la rencontrer.

A l'imitation de cette conſtruction, on peut décrire une ellipſe aſymptotique à un autre au dedans ou au dehors par un ſeul point donné.

Soit, par exemple, une ellipſe A B D E, autour de laquelle on en doit décrire une autre par un ſeul point p donné.

Ayant tiré à volonté la ligne indéfinie PD qui coupera l'ellipſe donnée aux points B & D, on portera la longueur PB en Dx, le point x ſera un de ceux de l'ellipſe demandée du point x ; on tirera auſſi à volonté l'indéfinie xA, qui coupera l'ellipſe en F & A, on portera xF en Ay, le point y ſera le troiſieme, puis yE donnera de même le point H, & ainſi de ſuite.

REMARQUE.

Pour rendre ces élémens plus adaptés à la pratique, nous avons conſidéré l'hyperbole dans le cône, ce qui abrege auſſi beaucoup les données néceſſaires pour la décrire.

Quoique M. *la Rue* ait avancé dans *ſa pratique de la coupe des pierres*, que l'étude des ſections coniques y étoit inutile, nous n'en avons pas jugé de même. On ne peut nier que la connoiſſance des propriétés de l'ellipſe ne ſoit eſſentielle dans cet Art, où cette courbe eſt ſans contredit la plus uſuelle. Je conviens que la parabole & l'hyperbole y ſont plus rares; mais nous venons de montrer que la parabole n'y eſt pas totalement inutile pour les trompes.

Nous pouvons compter pluſieurs cas où l'on rencontre des hyperboles : tels ſont les ſuivans.

1°. Pour faire l'épure de la porte en tour

ronde & en talud, ſuivant notre méthode, qui eſt fort naturelle; 2°. pour faire l'épure de la trompe conique à trois pans; 3°. pour la trompe en tour ronde, érigée ſur une ligne droite; 4°. pour les joints de la corne de vache; 5°. pour les naiſſances des arriere-vouſſures bombées; 6°. pour la nouvelle arriere-vouſſure de Marſeille; 7°. pour les lunettes ébraſées dans une voûte ſphérique; 8°. pour les arcs rampans, dont les pieds droits ſont en ſurplomb dans certains cas; 9°. pour les joints montans des arrondiſſemens coniques; 10°. pour la ſolution du problême qui donne la maniere de tirer les joints de tête des arcs elliptiques & hyperboliques par des points donnés hors du contour de ces courbes: 11°. enfin on peut employer cette courbe à la diminution des colonnes, au lieu de la conchoïde de *Nicomede*, ainſi que l'a enſeigné M. *Blondel* de l'Académie des Sciences. Je ſçais que les Artiſtes ſe paſſent de toutes ces préciſions géométriques, mais ils n'en font pas mieux, & c'eſt delà que viennent les petites fautes qu'ils remarquent dans la pratique ſans en deviner la cauſe. D'ailleurs nous ſommes dans un ſiecle où les Architectes élevés étudient tous la Géométrie, & ſont capables de juger de la théorie des Arts relatifs à leur état.

PROBLEME II.

Par un point donné à la circonférence d'une hyperbole, lui mener une tangente.

Cette ſolution eſt la même que celle que nous avons donnée pour tirer une tangente à l'ellipſe par des points donnés.

Il ne s'agit que de connoître les foyers, & de tirer de chacun d'eux une ligne FD, *f* D prolongée en dehors à volonté, & diviſer l'angle V D K qu'elles font entr'elles en deux également par la ligne *m* D, à laquelle, ſi on fait par le point D une perpendiculaire D *n*, *m* D ſera la tangente demandée, & cette ligne *n* D ſera la perpendiculaire à l'arc de l'hyperbole, par conſéquent celle qui doit déterminer la direction d'un joint de tête entre deux vouſſoirs, parce qu'elle fait les arêtes des pierres égales de droite & de gauche, à quoi cette opération nous ſert uniquement. *Fig.* 78.

La démonſtration de cette opération eſt la même que celle que nous avons donnée ci-devant pour l'ellipſe ; ces deux courbes ſe reſſemblent en beaucoup de choſes ; ce qui fait dire aux Géometres que l'hyperbole eſt une ellipſe renverſée, dont les foyers ſont au dehors du grand axe, comme ſi l'on avoit coupé une ellipſe en tra-

vers, & qu'on eût tourné les convexités dos à dos.

S'il s'agiſſoit de tirer un joint par un point donné au dehors, ce qui eſt un cas très-rare, on aura recours aux problêmes que j'en ai donné au Livre II de ma Stéréotomie ; nous ne nous arrêtons ici qu'à ce qui eſt néceſſaire pour la pratique ordinaire.

CHAPITRE II.

De la deſcription des Arcs rampans.

SECTION I.

LES termes de rampe & de rampans ſont uſités en architecture, pour ſignifier la poſition d'un corps, d'un arc, & même d'une ligne qui n'eſt ſituée ni horizontalement ni verticalement, ou (comme l'on dit) ni de niveau, ni à plomb. Ainſi une arcade ou une voûte, dont les naiſſances ne ſont pas de niveau, comme elles doivent être ordinairement, eſt appellée *rampante* ; & comme les ceintres de ces arcs, de quelque nature de courbe qu'ils ſoient, ne doivent point faire de jarret à leur jonction avec les lignes droites de leurs ſupports, qu'on appelle *pieds droits*, il eſt de l'eſſence que cette

jonction se fasse au point d'attouchement de la courbe avec sa tangente, soit que les pieds droits soient verticaux ou à plomb, soit qu'ils soient en talud ou en surplomb, ce qui constitue différens cas.

PROBLEME I.

Comme les courbes usitées sont celles des sections coniques, il s'agit de faire une portion de section conique, tangente à deux lignes droites, paralleles ou inclinées entr'elles, sur un diametre ou une corde inclinée à l'horizon, passant par les points d'attouchement.

Outre ces deux lignes droites tangentes aux naissances, on en considere encore une troisieme qui touche le sommet de la courbe, qu'on appelle pour cette raison *ligne de sommité*, dont la position est variable, suivant les occurrences.

Ces trois lignes étant données de position les unes à l'égard des autres, il sera facile de reconnoître quelle est la section conique qui doit satisfaire au problême.

Lorsque les pieds droits sont paralleles entr'eux, ou inclinés en talud, il est clair que la courbe convenable pour un arc rampant ne peut être qu'une portion de cercle ou d'ellipse, parce qu'il n'y a que ces deux sections coniques qui rentrent en

elles-mêmes ; mais lorſqu'ils ſont inclinés en ſurplomb, la parabole & l'hyperbole peuvent auſſi y convenir : ces cas ſont fort rares dans l'architecture moderne, où l'on ne fait plus, comme dans la gothique, des arcs-boutans extérieurs aux édifices voûtés ; on y ſupplée par des contre-forts de décoration, comme des grouppes de colonnes iſolées, ou des conſoles renverſées. Cependant il eſt à propos de faire mention de ces cas pour la perfection de la doctrine.

Lorſqu'on n'eſt point gêné pour la hauteur de l'arc, il eſt très-facile de raccorder la jonction de la courbe avec les pieds droits qui doivent la toucher aux deux points de naiſſance donnés de poſition ; mais lorſque la ligne de ſommité eſt donnée, le problême devient plus compoſé, parce qu'alors l'arc rampant eſt borné par quatre lignes, ſçavoir celle de *rampe*, qui eſt l'inclinée, paſſant d'un point d'attouchement des pieds droits à l'autre, laquelle eſt une corde ou un diametre ; les deux pieds droits qui ſont des tangentes, prolongées juſqu'à la ligne de ſommité ; enfin cette derniere ligne, qui en détermine la hauteur, & qui eſt une tangente de niveau ou rampante, comme le cas l'exige, ſuivant la poſition de l'ouvrage qu'on ſe propoſe de faire, comme ſous un eſcalier, ou ſous un palier.

1°. Si ces quatre lignes ſont paralleles entr'elles, comme RS & OP, SO & RP, il eſt clair que la courbe rampante ſera un demi-cercle ou une demi-ellipſe, puiſque ce ſont les ſeules ſections coniques qui puiſſent avoir deux tangentes paralleles; la courbe dans ce cas ne peut être un demi-cercle que quand ces quatre lignes formeront enſemble un parallélogramme rectangle, dont la hauteur (qui eſt la partie des pieds droits compriſe entre les lignes de rampe & de ſommité) ſera égale à la moitié de la baſe, qui eſt la ligne de rampe; dans tout autre cas la courbe ſera une demi-ellipſe, dont la ligne de rampe RP ſera un diametre, & CT = OP la moitié de ſon conjugué. *Fig.* 80.

2°. Les mêmes courbes ſerviront auſſi, quoique la ligne de ſommité ne ſoit pas parallele à la ligne de rampe, pourvu que les pieds droits ſoient paralleles entr'eux. *Fig.* 81.

3°. Si les pieds droits ſont en talud, la courbe ſera un arc de cercle ou d'ellipſe moindre qu'une demi-circonférence.

4°. Si les pieds droits ſont en ſurplomb, les quatre ſections coniques pourront avoir lieu.

Dans ce dernier cas, ſi la ligne de ſommité eſt parallele à la ligne de rampe, on a un moyen facile de connoître quelle eſt

celle des sections coniques qui convient au cas proposé.

Ayant divisé la ligne de rampe RP en deux également M, on tirera du point M au point de concours X des deux pieds droits la ligne MX : si la ligne de sommité
Fig. 82. passe par le milieu B de cette droite, la courbe demandée sera une parabole ; si elle
Fig. 83. la rencontre au dessus, comme en E, ce sera une hyperbole ; & enfin une ellipse, si
Fig. 84. elle la coupe au dessous, comme en L.

Par une semblable méthode, on reconnoîtra toutes ces courbes, en divisant les angles que font entr'elles les prolongations des pieds droits avec la ligne de sommité SO : car si l'on tire des lignes aux trois points d'attouchemens donnés RTP, & qu'ayant divisé ces lignes en deux également en *m* & *n*, on tire par les points S & O des lignes *sm*, *o n*, il arrivera 1°. ou qu'elles seront paralleles, comme à la figure 82, & alors la section conique qui y convient est une parabole ; 2°. si elles concourent en dedans vers un point C, comme à la fig. 84, ce sera une ellipse. Si au contraire elles concourent en dehors, fig. 85, ce sera une hyperbole.

Ces connoissances préliminaires étant supposées, l'énoncé du problême se réduit à celui-ci : *Etant données, trois lignes incli-*

nées entr'elles qui doivent toucher une ſection conique, dont on a les deux points extrêmes des attouchemens, trouver le moyen, ou en termes d'architecture, la direction des pieds droits d'un arc rampant, la ligne de rampe & celle de ſommité étant données, trouver le point d'attouchement de cette derniere.

Soient les pieds droits SR, OP, la ligne de rampe RP, & la ligne de ſommité SO données.

1°. Si les pieds droits ſont à-plomb, par conſéquent paralleles entr'eux, & la ligne de ſommité SO parallele à celle de rampe RP, le point d'attouchement doit être au milieu T de la ligne de ſommité SO, parce que l'arc ſera une demi-ellipſe, dont RP eſt un diametre, & CT la moitié de ſon conjugué. *Fig. 80.*

2°. Si les pieds droits étant paralleles entr'eux, les lignes de rampe & de ſommité ne le ſont pas, ayant prolongé le pied droit OP en E d'une longueur égale à OP, on tirera la ligne RE, qui coupera SO en T, où eſt le point d'attouchement demandé. *Fig. 85.*

2°. Si les pieds droits ne ſont pas paralleles entr'eux, on menera par le point S une ligne SD parallele à BO, direction du pied droit oppoſé, laquelle prolongée, coupera la ligne de rampe RP au point D; *Fig. 86.*

on portera la longueur D S ſur ſon prolongement en E, d'où l'on tirera ER, qui coupera la ligne de ſommité au point d'attouchement demandé en T, quelle que ſoit la ſection conique qui ſatisfait au problême.

La démonſtration de cette pratique dépend de pluſieurs propoſitions des propriétés des ſections coniques que nous ne pouvons rappeller, mais principalement de celle qui dit que ſi deux tangentes à une ſection conique ſe rencontrent, & qu'elles ſoient coupées par d'autres lignes menées par les points d'attouchement, elles ſont coupées en *raiſon harmonique*, c'eſt-à-dire que la premiere partie ſera à la troiſieme, comme la différence de la premiere & de la ſeconde eſt à la différence de la ſeconde & de la troiſieme, V O : V S : : O T : S T; ce qui eſt démontré dans tous les Traités des Sections coniques.

Cette vérité étant ſuppoſée, on démontrera que le point T, trouvé par notre conſtruction, eſt celui de l'attouchement : car on a trois points donnés de la diviſion harmonique, ſçavoir *o*, *s* & V; reſte à trouver le quatrieme T.

A cauſe des triangles ſemblables VOR, VSD, on aura VO : VS : : OR : SD = SE; & à cauſe des triangles ſemblables O R T, S E T, on aura O R : S E : : O T : S T : donc

par égalité, on aura V O : V S : : O T : S T. C. Q. F. D.

PROBLEME II.

Les points d'attouchemens des lignes de sommité étant donnés, tracer les sections quelconques des arcs rampans par plusieurs points.

1°. Pour la parabole, ayant divisé R P en deux également en M, on tirera du point M au point X la ligne M X, qui coupera S O en T, on lui menera les paralleles P Q, R V; on divisera ensuite les lignes P Q, V R, T X en un même nombre de parties égales, par exemple en quatre aux points 1, 2, 3, puis des points P & R, on tirera aux points de divisions de la ligne X T des droites P 1, P 2, P 3; & du point T aux points de divisions des lignes P Q, V R, on tirera des droites T 1, T 2, T 3 qui croiseront les premieres; les points de sections *x*, *y*, *z* des lignes correspondantes, c'est-à-dire partant des mêmes chiffres, seront autant de points de la parabole. *Fig. 87.*

Seconde solution pour le cas de l'ellipse & de l'hyperbole en arc rampant.

Les points d'attouchemens R, T, P étant donnés, on tirera les lignes R T, P T, que l'on divisera en deux également en *m* & *n*, *Fig. 88, 89.*

par où & par les points S & O, on menera les lignes *ms*, *no*, lesquelles étant prolongées en dedans pour l'ellipse, se couperont
Fig. 88. au point C, où sera le centre, & pour l'hy-
Fig. 89. perbole au point *c*, qui sera aussi le centre, c'est-à-dire le milieu du premier axe, par le moyen duquel on a déja un diametre T*t*, en portant CT de C en *t* sur la ligne TC prolongée. Ainsi la question sera réduite à celle-ci.

Un diametre de l'ellipse ou de l'hyperbole, & une ordonnée à ce diametre étant donnés, trouver le parametre & autant de points que l'on voudra au contour de la section.

Soit T*t* le diametre donné, & l'ordonnée PM parallele à la tangente SO, par les points *t* & P, ayant tiré la ligne *t*PV, fig. 88, & PV*t*, fig. 89, qui coupera la ligne SO prolongée en V, on portera TV de T en E sur le diametre *t*T prolongé, s'il le faut, comme dans l'ellipse, puis on menera E3 parallele à SO, & 3G parallele à ET; alors on divisera les longueurs 3G & TV en un même nombre de parties égales; par les points de divisions de la ligne 3G, & par le point T, on menera des droites indéfinies; puis par les points de divisions de la ligne TV, & par le point *t*, on menera d'autres droites qui couperont les pre-

miers; les points de sections x, y des lignes correspondantes sont autant de points de la courbe.

Pour avoir l'autre moitié de l'ellipse, il n'y aura qu'à mener des parallèles par les points x, y à la tangente de sommité SO qui couperont le demi-diametre CT en r, au-delà duquel on portera les longueurs rx, ry, pour avoir des points correspondans 4 & 5; alors on aura à la circonférence sept points, sçavoir R, 5, 4, T, x, y, P, par lesquels on tracera avec une regle pliante le contour de l'arc rampant : il est visible qu'on peut augmenter le nombre de ces points tant qu'on voudra, en partageant G3 & TV en un plus grand nombre de parties égales.

Cette même construction s'applique aussi à l'hyperbole, comme on le voit à la fig. 89.

Nous ne pouvons pas en démontrer ici tout au long la justesse, parce qu'il faudroit avoir posé des principes que nous n'avons pas dû insérer ici; il suffira de les indiquer.

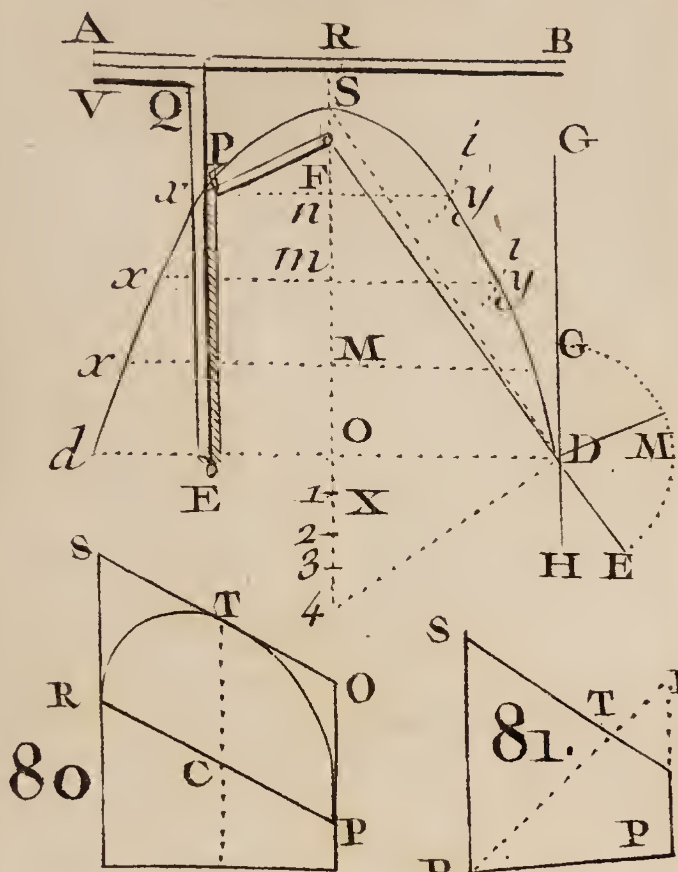
Il est démontré dans les Traités des Sections coniques, que la corde qui passe par des points d'attouchemens de deux tangentes qui concourent, étant divisée en deux également, si l'on tire par le milieu au point de concours une ligne droite, elle passera par le centre de la section, si elle en

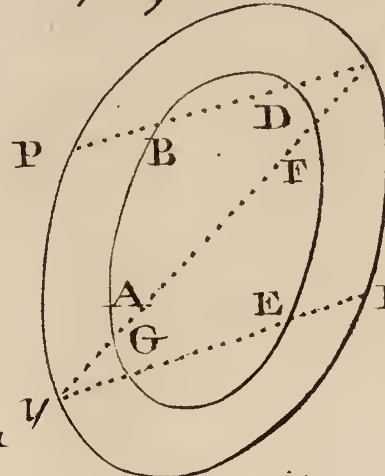
a un, comme l'ellipſe & l'hyperbole; & ſi elle n'en a point, elle ſera parallele à l'axe, comme dans la parabole; ce qui fait connoître la nature de la ſection conique, qui ſe préſente comme nous l'avons dit.

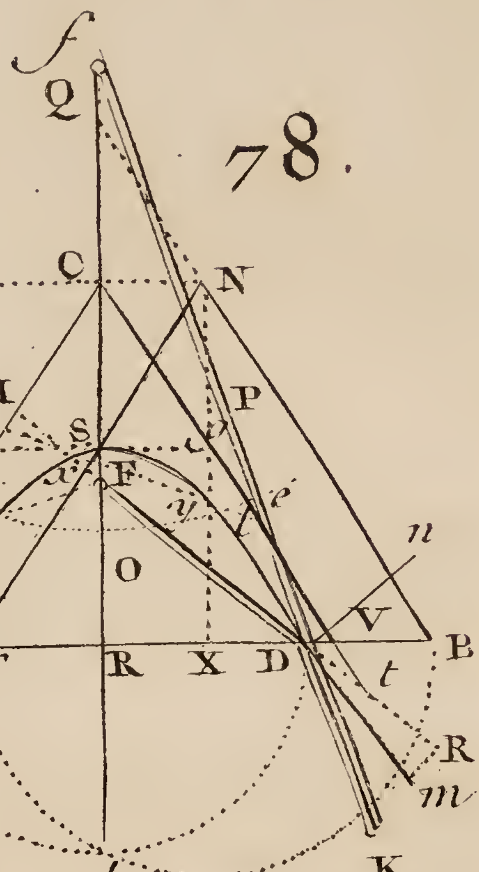
Le centre étant connu, & le point d'attouchement T de la ligne de ſommité, il eſt clair que l'on connoît le demi-diametre, & par conſéquent le diametre qui en eſt le double, & les deux ordonnées à ce diametre, menées parallélement à la tangente de ſommité, par les points donnés R & P à la circonférence.

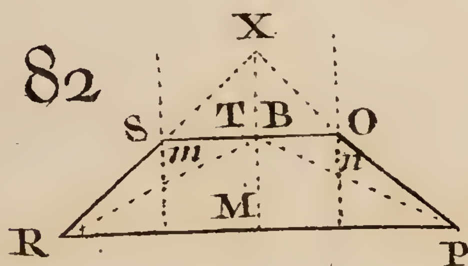
Par le moyen du diametre T*t*, & d'une ordonnée au diametre, nous avons trouvé le parametre, qui eſt le même pour toutes les ordonnées, étant une troiſieme proportionnelle aux deux diametres, comme nous l'avons dit dans notre Stéréotomie, Liv. II, page 161.

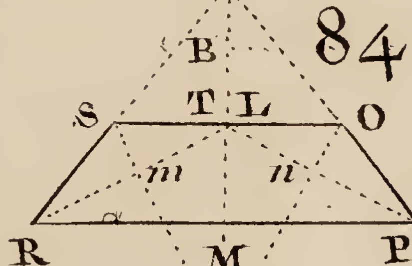


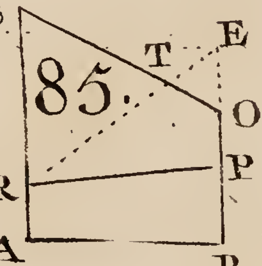

Fig. 77.
A
R
B
V
Q
S
P
F
n
m
M
O
X
G
D
M
H E
E
d

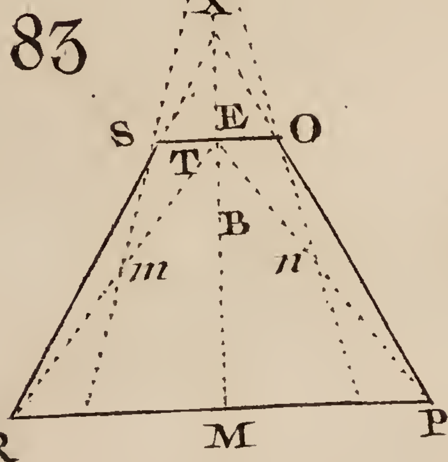

79.
P
B
D
F
A
G
E
H


78.
Q
C
N
S
F
O
T
A
R
X
D
B
K

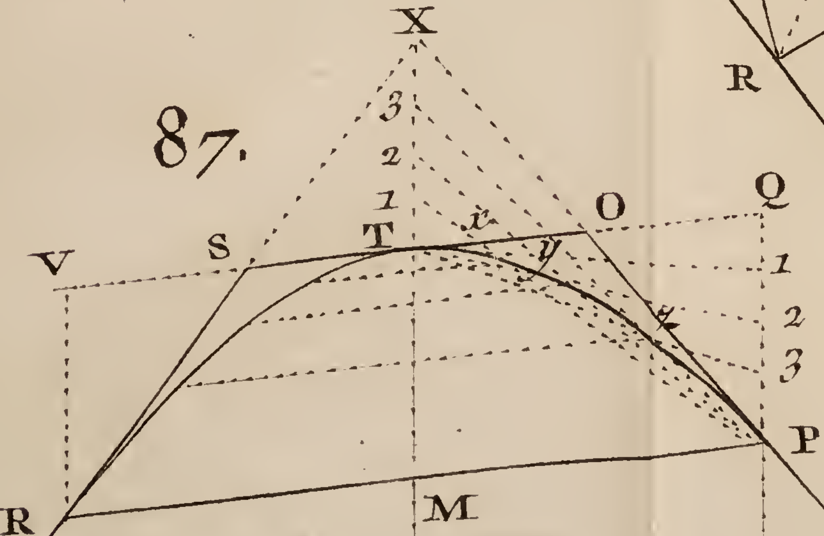

80
S
T
R
O
C
P

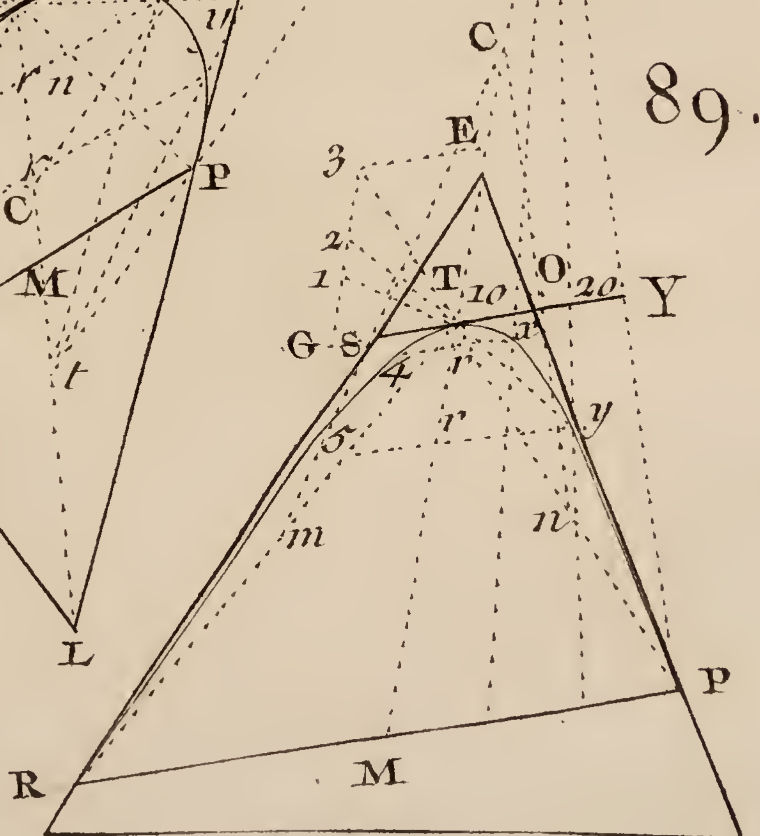

81.
86.
S
T
E
O
P
R
X
V
D
A
B


85.
S
T
E
O
R
P
A
B


82
X
S
T B
O
M
R
P
83
E
B
m
n


88.
84
E
O
T
S
C
M
P
R
G
L


87.
X
V
S
T
O
Q
P
R
M


89.
C
E
T
O
Y
G
S
P
R
M

CHAPITRE III.

De la description de quelques courbes usuelles en architecture qui ne sont pas des sections coniques.

§.

De la Spirale.

NOUS rangeons la spirale à la suite des *arcs rampans*, parce que ses parties prises séparément dans une révolution, peuvent très-bien servir au même usage: car si l'on suppose la spirale ABC traversée par une ligne de rampe AB, la partie ADB est un arc rampant, tel qu'il convient, soit que les pieds droits soient paralleles, soit qu'ils soient inclinés en talud ou en surplomb, ne s'agissant que d'élever ou de baisser cette ligne de rampe, pour que les points A & P soient touchés par les pieds droits sans jarret.

Il n'y a pas de ligne courbe réguliere plus susceptible de variations que la spirale. M. de *Varignon* en a fait voir une infinité dans un Mémoire inséré dans ceux de l'Académie des sciences en 1704; il nous suffira d'en décrire de deux ou trois especes relatives à l'usage qu'on en peut faire dans

dans certains ouvrages d'architecture.

SECTION I.

Premieree ſpece. De la ſpirale d'Archimede, qui eſt la plus ſimple & la plus uniforme de toutes.

D'un point C pour centre, & AC pour rayon, pris à volonté, ayant décrit un cercle deſtiné à renfermer une révolution entiere de la ſpirale, on en diviſera la circonférence en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à celle de la ſpirale propoſée, par exemple en douze; ce qui peut ſe faire géométriquement, en portant ſix fois le rayon, & ſous-diviſant chaque partie en deux : on tirera par ces diviſions autant de rayons ſur leſquels on portera ſuccèſſivement, premiérement un rayon du cercle entier, que l'on diviſera en même nombre de parties qu'on a diviſé la circonférence, par exemple en douze, en diminuant la longueur du rayon primitif d'une partie à chaque rayon ſuivant autour du centre C, auquel ce rayon ſera réduit à rien, comme il eſt viſible par la fig. 90, & l'on fera paſſer une ligne courbe à la main, ou avec une regle pliante, par le bout de chacun de ces rayons, qui ſera la ſpirale propoſée pour une ſeule révolu-

tion. Si l'on veut en faire deux ou plus, complettes ou incomplettes, il faut prolonger les rayons au-delà du premier cercle de révolutions, & augmenter leur longueur d'une partie à chacun; ce qui eſt facile à comprendre: alors la courbe s'élargira en circonférence autant que l'on voudra.

Si dès le commencement on s'étoit déterminé à une révolution & demie, on auroit diviſé le plus grand rayon donné en dix-huit parties, ainſi du plus ou moins; ce qui eſt trop ſenſible pour s'y arrêter.

Le cercle qui enferme la premiere révolution, s'appelle *cercle de circonſcription*; celui qui eſt au dehors ou au dedans du point A, s'appelle *cercle de révolution*, & les arcs de ce dernier, *arcs de révolution*.

REMARQUE.

Si après avoir tracé une ſpirale de droite à gauche, on en trace une autre en ſens contraire de gauche à droite, il ſe forme par leur rencontre un contour ſemblable à celui d'un cœur, comme on voit à la fig. 90, laquelle étoit ſouvent employée dans les ornemens contournés des vitraux gothiques.

PROBLEME I.

Alonger, raccourcir, arrondir, ou applatir le contour d'une ſpirale en telle raiſon que l'on voudra, & la varier infiniment, ſi l'on veut.

Premiérement on peut varier les rayons des arcs de révolutions dans le rapport des ordonnées de telles courbes que l'on voudra choiſir, & les arcs de révolution dans de pareils rapports ; ce qui rend ce problême très-général.

En ſecond lieu, ſans varier les arcs, les faiſant toujours égaux en nombre de degrés, varier les rayons comme les racines des puiſſances quelconques, quarrées, cubes, &c, ou comme les tangentes, ſécantes, &c. Les Architectes y emploient les tangentes ou leurs différences pour tracer leur volute ionique.

Troiſiémement, changer la poſition de la courbe génératrice à l'égard de l'axe de la ſpirale, comme ſi, au lieu de placer les deux axes ſur une même ligne, en donnant à la ſpirale & à la courbe génératrice un centre différent, ce que M. de *Varignon* appelloit *vertico-centrale*, on place l'axe de la ſpirale, & le centre ſur celui de la génératrice ; ce qu'il appelle *co-centrale.*

Comme l'on a ſouvent beſoin d'une ſpi-

rale intérieure ou extérieure, qui en accompagne une autre, pour déterminer les différentes largeurs de la côte d'une volute qui doit s'élargir insensiblement depuis le centre, ou un cercle circonscrit au centre, qu'on appelle l'*œil de la volute*, il faut avoir une méthode sûre de cette *compagne*.

La premiere spirale A B C étant tracée, & un point D donné sur son axe A C pour la plus grande largeur A D de la côte de volute à faire, on tracera à part un triangle rectangle *a*, *c*. 12 isoscele, dont les côtés soient égaux à l'axe A C; sur *a*. 12, on prendra un point *d*, de maniere que *ad* égale C D dans la premiere figure, & l'on tirera *dc* : puis ayant divisé *c*. 12 en douze parties égales à celles de E C de la premiere figure, on tirera autant de paralleles à *a*. 12 qui couperont C *d* aux points *s*, *t*, *u*, *x*, *y*, *z* les parties 11. *z*. 10. *y*, &c. de ces paralleles, comprises entre *c*. 12 & *cd*, seront les rayons de la spirale, compagne de la premiere: ainsi on portera la longueur 11. *z* sur le rayon C1 de circonvolution 10. *y* sur C2, 9*x* sur C3, & ainsi de suite jusqu'au centre C, pour avoir la spirale demandée D *x y* C qui tend au même centre C que la premiere A B C, s'approchant proportionnellement. *Fig.* 90. *Fig.* 91.

Si l'on vouloit qu'elle en approchât inégalement, on pourroit, au lieu d'une ligne

droite Cyd, faire un arc de cercle ou de toute autre courbe.

§. *Autres especes de spirales de différens contours, qu'on peut appeller circulaires elliptiques, paraboliques, &c.*

Si, au lieu de suivre la progression arithmétique dans la détermination des longueurs des rayons, comme dans la spirale de la figure précédente, à laquelle on donne le nom d'*Archimede*, on suit le rapport des ordonnées dans le cercle, l'ellipse, la parabole ou l'hyperbole, ou toute autre courbe, on pourra appeller ces spirales du nom de leurs génératrices, circulaires, elliptiques, paraboliques, &c; nous allons en donner un exemple tiré du cercle.

Soit une ligne AX prise à volonté pour l'axe d'une spirale, dont on veut que les longueurs des rayons soient dans le rapport des ordonnées au diametre d'un cercle.

Fig. 92. Ayant pris AC pour le plus grand rayon de la spirale, & le point C pour son centre, on décrira un cercle d'un rayon pris à volonté, dont on divisera la circonférence, comme nous avons fait ci-devant, par exemple en douze parties égales, ou plus, si l'on veut, & l'on tirera des diametres par ce point de division; ensuite du point A pour centre, & de l'intervalle AC pour rayon,

on décrira un quart de cercle, ou, ſi l'on vouloit, un quart d'ellipſe, ou une demi-parabole ou hyperbole : nous nous en tenons ici au quart de cercle pour ligne génératrice.

On ſe déterminera enſuite à la quantité de révolutions qu'on voudra que la ſpirale faſſe autour de ſon centre C ; nous n'en ſuppoſerons ici qu'une & demie pour exemple, auquel cas on diviſera le rayon RA du quart de cercle générateur en trois parties égales, dont deux exprimeront la premiere révolution en RD, que l'on diviſera en autant de parties égales que l'on a diviſé le cercle de circonvolution A3X*d*, comme ici en 12 ; & par chacune de ces diviſions, on tirera des paralleles juſqu'au rayon *d*C, qui couperont la circonférence du quart de cercle RC aux points 1, 2, 3, 6, 9, 12, &c, & le rayon C*d* aux points *d*, *e*, *n*, *v*, *r*, &c, les longueurs R*d*, 3*e*, 6*n*, 9*u*, 12*r* ſeront celles des rayons de la ſpirale, qu'on portera ſucceſſivement ſur ceux du cercle de circonvolution, comme l'on a fait ci-devant à la ſpirale d'*Archimede*. Ainſi la longueur 1.*i*, après R*d*, ſera porté du centre C en *x* ſur le rayon C1, où elle déterminera le ſecond point de la ſpirale ; la parallele à R*d* paſſant par le point 2, donnera ſur le rayon C2 le point *y* pour le 3[e] de la ſpirale, en y comprenant le donné A, la

longueur $3e$ donnera le point z sur le rayon C b, ainſi des autres, en prenant toujours pour rayons de la ſpirale les différences du rayon aux ordonnées du quart de cercle, ſçavoir, $6n$. $12r$, & toutes les intermédiaires & ſuivantes, juſqu'au centre C, que la petiteſſe de la figure ne nous permet pas de bien diſtinguer en particulier, où l'on voit que depuis le point A de la premiere révolution, les rayons viennent en diminuant inſenſiblement juſqu'au centre, où le dernier eſt réduit à rien.

Il eſt viſible que ſi la ſpirale avoit dû avoir deux révolutions entieres, on auroit diviſé le rayon AR du quart de cercle générateur en 24 parties au lieu de 18; ſi la ſpirale avoit dû faire deux tours & demi, il en auroit fallu trente, qu'on auroit auſſi marqué ſur le rayon Cd pour prendre les différences des ordonnées, à l'égard du rayon AC ou de ſa parallele Rd, meſurées depuis la convexité de l'arc RC juſqu'au rayon Cd. Enfin après avoir marqué les points à la circonférence de la ſpirale, on la tracera comme nous avons dit de toutes les autres courbes à la main de point en point, en ſuivant un arrondiſſement que l'œil indique, ou avec une regle pliante.

M. de *Varignon*, inventeur de cette ſpirale, l'appelle, ainſi que ſes ſemblables, du

nom de *vertico-centrale*, parceque ſon centre eſt ſur l'axe du cercle de circonvolution, mais non pas au même point que celui de la courbe génératrice : il appelle *co-centrale* celles dont les centres ſont communs. Nous en allons donner un exemple.

Soit, comme dans les ſpirales précédentes, un cercle de *circonvolution*, diviſé en douze parties égales, diviſé par autant de rayons partant du centre C.

Soit auſſi priſe pour la courbe génératrice une autre que le cercle, par exemple, une *hyperbole équilatere* H Y D, dont on mettra le centre ſur celui du cercle de circonvolution, comme on le voit dans la fig. 93. *Fig. 93.*

Soit un rayon donné A C pour le plus grand de la ſpirale à décrire, & pour ſon axe A X. On prendra une ligne conſtante C G à volonté, pour exprimer une révolution entiere de la ſpirale, comme nous avons fait pour la précédente, & qu'on diviſera de même en autant de parties égales qu'on aura diviſé la circonférence du cercle de circonvolution, nous ne la diviſerons ici qu'en ſix, à cauſe de la petiteſſe de la figure.

On poſera une des aſymptotes A C ſur l'axe A X, & l'autre ſur la perpendiculaire C P, en retour d'équerre, parce qu'on a ſuppoſé l'hyperbole équilatere, auquel cas

le point C est également le centre de cette hyperbole, & du cercle de circonvolution; alors on décrira l'hyperbole génératrice H V R en dedans des asymptotes AC, CP, & l'on tirera des paralleles à AC par les divisions de la ligne CG, qui couperont cette courbe aux points 1, 2, 3, 4, 5, 6, & la constante CG aux points 1, 2, 3, 4, 5, G, les longueurs CH, 1.1, 2.2, 3.3, 4.4, 5.5, 6.G seront les rayons des arcs de révolutions de la spirale: ainsi prolongeant le rayon CH, on tracera du point C pour centre l'arc HK, qui rencontrera le rayon prolongé en K, dans la supposition que la constante soit divisée en 12, quoique nous ne l'ayons divisée ici qu'en six, pour rendre les divisions sensibles à la vue dans une petite figure, où l'on doit éviter la confusion: on suivra de même que dans la précédente les points trouvés sur les rayons en L, *m*, *n*, &c. jusqu'en C, où il faut remarquer que la spirale n'atteindra point, mais tournera autour sans y parvenir, parce qu'on sçait l'admirable propriété des asymptotes qui approchent toujours de l'hyperbole, sans jamais la rencontrer; c'est pourquoi nous avons pris le point H en dedans pour commencement de la spirale; mais nous ne pouvons y assigner une fin, parce qu'il reste vers le centre une distance A P

de l'asymptote à la courbe : ainsi on peut décrire un cercle autour du centre C sans jarret, avec la spirale, plus parfaitement que celui que l'on fait pour l'œil de la volute ionique, où l'on ne peut effacer ce jarret géométriquement.

Remarque sur le choix des courbes génératrices, pour former différentes sortes de spirales.

Dans le premier exemple des positions *vertico-centrales* des courbes génératrices, nous n'avons décrit qu'un quart de cercle, parce que si nous avions mis le sommet d'un demi-cercle au centre de celui de circonvolution, il se seroit formé deux spirales, tournant autour du centre C en sens contraire, qui auroient formé la figure d'un cœur, comme nous l'avons fait remarquer sur la spirale d'*Archimede*, répétée en sens contraire.

Pareille chose arrivera à toutes les courbes qui couperont l'axe également ou inégalement ; d'où il résultera aussi des spirales égales ou inégales qui rebrousseront comme revenant en arriere.

Secondement, que si l'on prend, comme dans notre exemple de l'hyperbole équilatere, une courbe qui ne touche ou ne coupe

point l'axe, la ſpirale n'aura ni commencement ni fin. On peut lui aſſigner un commencement à volonté, en déterminant à volonté un rayon d'arc de révolution, mais non pas une fin, comme on vient de le dire. Si au contraire on prend une courbe logarithmique au lieu de l'hyperbole, la ſpirale qui en ſera engendrée, aura un commencement déterminé, mais non pas une fin : nous ne pouſſerons pas plus loin ce genre de théorie de ce qui doit arriver, ſuivant la configuration des lignes qu'on peut prendre pour génératrice ; il nous ſuffira d'en tirer les conſéquences ſuivantes.

COROLLAIRE I.

Il ſuit des conſtructions des différentes courbures de ſpirales, que l'on peut, 1°. fixer les révolutions de ces courbes à telle diſtance que l'on veut du centre C : car ſuppoſant qu'on veuille que la premiere finiſſe, par exemple en D, on menera par ce point la perpendiculaire DE à l'axe AC, laquelle rencontrera la génératrice en E par où
Fig. 94. tirant ES parallele à AC, la ligne ES ſera la conſtante qui exprime une révolution entiere à diviſer en autant de parties égales, que l'on aura diviſé le cercle de circonvolution ; mais ce point D étant déterminé, on n'eſt plus maître d'en déterminer d'autre-

que celui qui doit ſuivre, parce que cette interruption d'uniformité cauſeroit un jarret.

COROLLAIRE II.

On connoîtra par l'inverſe à quel point de l'axe ſe terminent toutes les révolutions, en tirant des ordonnées par l'extrêmité de la conſtante, poſée ſur la tangente C T du quart de cercle, en répétant ſa longueur de ſuite; de ſorte que, ſi elle eſt le tiers de C T, la premiere révolution, à commencer en T, ſera déterminée au point x, la ſeconde en y, & la troiſieme en c, & par les ordonnées à l'axe en v & z, leſquelles ſont xv & yz. *Fig. 94.*

USAGE.

Quoique la ſpirale ne ſoit pas une ſection de ces corps qu'on appelle *géométriques*, comme les ſpheres, les cônes & cylindres, c'eſt la ſection d'un de ces corps formés par la nature, qu'elle offre fréquemment à nos yeux dans les coquillages de terre & de mer avec une infinité de variations: ainſi elle eſt un objet de notre Stéréotomie, d'autant mieux que cette eſpece de courbe eſt très-fréquemment employée en architecture en petit, comme dans les chapitaux de colonnes, & une infinité d'ornemens de ſculpture ou de ſerrurerie, &

en grand, dans les consoles renversées, qu'on fait servir d'arcs-boutans à la poussée des voûtes, ou d'amortissemens aux façades qui se resserrent par le haut, comme sont la plûpart de celles de nos Eglises.

Si lorsqu'on a trouvé par les voies géométriques, indiquées dans ce problême, une sorte de spirale qui plaît à la vue, mais qu'on voudroit un peu plus large ou plus étroite, sans toucher à une des dimensions de hauteur ou de largeur, il sera facile de la réduire par la grille, c'est-à-dire par les carreaux, comme les desseins, en rétrecissant ou haussant les parallélogrammes qui doivent représenter les quarrés parfaits de la grille appliquée sur le dessein original.

Il nous reste à donner la maniere d'incliner les joints des pierres de l'appareil d'une courbe en spirale, de maniere que les angles soient égaux de part & d'autre ; ce qu'on ne peut faire qu'en tirant une tangente à cette courbe, à laquelle une perpendiculaire, par le point donné, est la ligne qui satisfait à cette question.

PROBLEME II.

Par un point donné au contour d'une ſpirale, lui mener une tangente.

Premiérement, s'il s'agit de la courbe méchanique, attribuée à *Archimede*, la ſolution de ce problême dépend de la quadrature du cercle, puiſqu'il a démontré lui-même que la ſoutangente, à la fin de la premiere révolution, eſt égale à la circonférence du cercle circonſcrit. Mais ſuppoſant le rapport du diametre à la circonférence de 7 à 22, ou 100 à 314, ce qui ſuffit pour la pratique des Arts, il ſera aiſé de tirer la tangente demandée.

Soit la ſpirale A B P C, qui fait deux révolutions complettes, la premiere de C en B depuis le centre C, la ſeconde de B en A, ſi l'on donne le point B pour celui par lequel on doit mener la tangente, on menera une perpendiculaire au rayon CB égale à la circonférence du cercle, qui auroit BC pour rayon, ou à ſa moitié, comme dans cette figure, en BD; enſuite ayant fait DT perpendiculaire à BD, & égale à BC, ou à ſa moitié, on tirera BT, qui ſera la tangente demandée. *Fig. 95.*

Si le point donné étoit en *d*, on prendra une des parties aliquotes de la circonférence

du cercle, qui a C*d* pour rayon, au lieu de B C, comme le tiers ou le quart, & toute autre.

Si le point donné eſt en P dans l'intervalle de la premiere révolution à la ſeconde, on en uſera encore de même; ayant tiré P C, on lui fera la perpendiculaire P H, qu'on fera égale à la circonférence du cercle, qui a P C pour rayon, & l'on achevera, comme ci-devant, portant P C en H F, & l'on tirera H F, la ligne P F ſera la demandée, à laquelle on fera la perpendiculaire P N, qu'on cherche pour joint d'un appareil.

Secondement, ſi les ſpirales ſont élevées d'un degré au deſſus de celle d'*Archimede*, comme les *vertico-centrales*, dont nous venons de parler, & les *co-centrales*, il faut une nouvelle conſtruction pour leur tirer des tangentes par des points donnés.

Soit la ſpirale circulaire vertico-centrale A E F G C d'une révolution & demie, & le point P donné pour lui tirer une tangente, on portera ſur le rayon C P prolongé le double de la longueur en C*n*, & ſur C H perpendiculaire à ce rayon la longueur C H égale à l'arc de révolution I P rectifié : puis ayant fait H*g* parallele & égale à C*n*, on portera ſur la même H*g*, prolongée la longueur C*d* du rayon de la premiere révolution

tion complette, à commencer du centre C, de G en F, si le point P & le point H sont au dessus de C E, ou sur *c f* de *n* en *f*, si ce point est au dessous, comme dans la figure présente, & par les points *f* & *g*, on tirera une ligne droite qui rencontrera C H prolongée en *x*; la ligne menée du point *x* par le point donné P sera la tangente que l'on cherche, à laquelle, si l'on tire une perpendiculaire P *q*, ce sera la direction du joint d'un appareil de pierres de suite pour former une spirale de cette espece.

La démonstration de cette pratique, tirée de l'équation générale de M. de *Varignon*, est un peu trop longue pour avoir place dans cet abrégé : on la trouvera dans ma Stéréotomie, Tome I, Liv. II, p. 201.

PROBLEME III.

Décrire la courbe de la section plane d'un corps cylindrique annulaire, & d'un héliçoïde coupé de même par un plan parallele à l'axe de l'un ou l'autre de ces corps.

Nous avons montré au Livre précédent que les sections planes d'un corps annulaire, coupé par un plan passant par le centre C de l'anneau, perpendiculaire à celui qui passe par l'axe courbe de l'anneau AKE,

étoit un cercle ou demi-cercle, ou demi-ellipſe, comme on le voit en AHB; ce qui eſt évident par la génération de ce corps cylindrique courbe.

Fig. 96. Mais ſi l'anneau eſt coupé par un plan perpendiculaire à celui de la baſe, paſſant par l'axe courbe à une diſtance plus grande du centre que le rayon du vuide de l'anneau, c'eſt une courbe du quatrieme ordre, qu'il eſt cependant très-aiſé de décrire.

Soit le demi-cercle ou demi-ellipſe AKE, & ſon parallele concentrique BFD qui comprennent entr'eux une demi-couronne de cercle qui repréſente le plan de la ſection d'un demi-anneau, dont le vuide du milieu eſt le demi-cercle BFD.

Soit auſſi un plan vertical perpendiculaire au premier AKE qui coupe cet anneau, ſuivant une ligne AE, paſſant par ſon centre C: il eſt clair que ſa ſection ne conſiſtera qu'en deux demi-cercles AHB & DhE, ſéparés l'un de l'autre d'un intervalle vuide BD.

Mais ſi un autre plan, auſſi perpendiculaire au premier AKE, coupe l'anneau, ſuivant une ligne IL, au-delà du vuide BFD, la ſection ſera continue, & au lieu des deux demi-cercles ſéparés, elle ſera une courbe ondée INMnL, dont il faut trouver le contour par pluſieurs points.

Pour y parvenir, il faut divifer le diametre A B en autant de parties que l'on voudra, égales ou inégales, comme 1, 2, G, 4. 5, par lefquelles on tracera du centre C de l'anneau autant de cercles concentriques. Il nous fuffit ici d'y tracer des quarts, qui couperont la ligne droite I L de la fection dans le plan A K E aux points *v*, *x*, P, *y*, *z*, par lefquels on élevera des perpendiculaires, qu'on fera égales aux ordonnées au diametre AB, tirées par les points 1, 2, G, 4. 5, fçavoir *vu* égale à 1. *o*; *x*X égale à 2. *o*; PN égale à GH, *y*Y égale à 4. *o*; & QM égale à peu près à *o*. 5, ce que la petiteffe de la figure ne permet pas d'exprimer bien diftinctement, & par les points *u*, X, N, Y, *z*, M, on tracera la moitié de la courbe demandée, à laquelle l'autre moitié M *n* L fera parfaitement égale à ce qu'il falloit faire.

Préfentement il fera aifé d'appercevoir les différens contours & variations dont la courbe de cette fection eft fufceptible, en fuppofant la corde de la fection I L plus ou moins éloignée du centre de l'anneau C : car fi elle paffoit par le point F, extrêmité du rayon du vuide de l'anneau, la fection s'abaiffant au plan de la bafe en F, y feroit divifée en deux parties féparées, parce que la hauteur M de fon milieu s'évanouit en F.

Si au contraire la corde de ſection I L eſt éloignée du centre C, de maniere qu'elle ſoit tangente au cercle du milieu de l'anneau, qui eſt ſon axe courbe, la ſection ne s'abaiſſera point à ſon milieu, parce que l'ordonnée à ce point ſera égale à G H du demi-cercle A H B : ainſi au lieu d'une inflexion au milieu, ce ſera le ſommet de la courbe.

Enfin plus la corde I L de ſection s'éloignera, plus elle reſſemblera à une ovale.

COROLLAIRE.

De la deſcription de cette ſection d'un corps cylindrique annulaire, on peut tirer facilement celle d'une vis ou corps héliçoïde, ſuppoſé coupé par un plan parallele à ſon axe, parce que la projection de ce corps eſt un anneau, & l'autre étant un corps cylindrique tournant en montant, il ne s'agit que d'incliner le diametre de la ſection, & d'y appliquer les ordonnées correſpondantes à l'horizontale, ſuivant un angle donné ; ce que nous ferons mieux ſentir lorſque nous parlerons de la maniere de changer les courbes horizontales en rampantes, qui en conſervent toutes les propriétés.

USAGE.

Les voûtes ſur le noyau & les berceaux tournans ſont des anneaux fermés & ouverts ; ſi ces voûtes ſont interrompues par quelques pans de mur droit, comme une baſe de clocher derriere un chevet tournant, il s'y forme la courbe dont nous avons parlé.

CHAPITRE IV.

De l'imitation des lignes courbes régulieres par des compoſitions d'arcs de cercles.

SECTION I.

L'IGNORANCE des propriétés des lignes courbes les plus communes dans les Arts, & une plus grande facilité de tracer des arcs de cercle que des ellipſes, ont fait chercher pluſieurs moyens de les imiter par un aſſemblage de portions de cercles, mais ſans ſuccès en pluſieurs circonſtances, comme l'on voit dans l'Art de deſſiner l'Architecture, par *Boſſe*, qui avoit raſſemblé les meilleures pratiques de ſon tems. M. *Pitot* de l'Académie des Sciences, eſt le premier qui en ait donné une méthode générale & géométrique, pour éviter les jarrets qui ren-

doient ces imitations désagréables à la vue. M. *Camus* ensuite, dans son Cours de Mathématique, fait pour les Ingénieurs militaires, en a donné d'autres, & a étendu cette théorie à de nouvelles circonstances de plus de points donnés.

Regle générale des imitations.

Tout l'art d'imiter les courbes de toutes especes par des assemblages de différens arcs de cercles, consiste à poser les deux centres de deux arcs qui doivent se joindre sans jarreter sur une même ligne droite qui passe au point de leur jonction.

La raison en est évidente par les seuls élémens de Géométrie, parce que le rayon d'un grand, comme d'un petit cercle, fait toujours, avec son arc quelconque, un angle mixte infiniment approchant du droit, & l'arc un angle infiniment petit avec sa tangente au point d'attouchement, où elle est perpendiculaire au rayon ; de sorte que l'œil ne peut appercevoir cette différence infiniment petite de part & d'autre de ce point, il ne s'apperçoit qu'à quelque distance delà du plus & du moins de courbure des arcs de rayons inégaux : mais pour trouver cette position des rayons & des centres dans des circonstances données, il a fallu de bons

Géometres pour parvenir à donner des formules générales qui fournissent de faciles constructions.

PROBLEME I.

Deux axes étant donnés, imiter une ellipse par un assemblage de quatre arcs de cercles, ou simplement, à l'usage de notre Art, une moitié d'ellipse, ou anse de panier, avec trois arcs de cercles de 60 degrés chacun.

Soit AB le grand axe donné, & CD la moitié du petit, on la portera sur AB de B en *d* pour avoir la différence C*d* des deux demi-axes. On la divisera en deux également en *m*, puis on portera C*m* en C*y*; sur *yd* comme diametre, on décrira le demi-cercle *yed*, qui coupera l'axe CD en *e*; on portera l'intervalle *ye* en *y*F, les points F & *f* équidistans de C seront les centres des petits arcs des extrêmités de la demi-ovale, qu'on déterminera à 60 degrés, en portant AF en AI, côté d'un triangle équilatéral AFI, dont on prolongera le côté IF jusqu'à ce qu'il rencontre DC prolongé en X, où sera le centre de l'arc du milieu IDE, comme la figure le montre entre les rayons XI & XE. C. Q. F. F. *Fig. 97.*

La démonstration de la justesse de cette opération, suivant la regle générale que

nous avons établie ci-devant, eſt viſible, en ce que les deux centres X & F d'un côté, & X & f de l'autre, ſe trouvent ſur une même ligne, de ſorte qu'il ne peut y avoir de jarret dans la jonction de l'arc du milieu I D E avec les extrêmes I A & E B.

Quant à l'art de trouver cette conſtruction, il eſt plus difficile qu'il ne paroît, parce qu'il dérive d'une équation algébrique, trouvée par M. *Pitot*, qu'il eſt inutile de répéter ici, où il ne s'agit que des élémens de pratique.

M. *Camus* a traité cette matiere tout différemment en cinq ou ſix problêmes ſur des données, dont il n'eſt pas mention dans le précédent, par exemple dans le premier, outre les axes, il ſuppoſe que les centres des arcs extrêmes ſoient donnés; ce qui fournit un moyen de varier les anſes de panier, en les arrondiſſant plus ou moins, auquel cas les arcs extrêmes doivent être plus grands que de 60 degrés, ſi la moitié du petit axe eſt moindre que les cinq douziemes du grand, & par conſéquent celui du milieu ſera d'un plus petit nombre de degrés; voici ſa conſtruction.

Fig. 97. Soit A B le grand axe de l'*anſe de panier*, C D la moitié du petit ou ſa *montée*, & les centres des arcs extrêmes donnés en F & f: on portera A F en D g ſur la montée, &

l'on tirera F g; ſur le milieu M, on tirera la perpendiculaire m X, qui coupera le petit axe D C prolongé, s'il le faut, en X, où eſt le troiſieme centre de l'arc du milieu, & duquel on tirera par les centres F & f donnés les lignes X E, X I qui donneront les points E & f pour ceux des jonctions des différens arcs de cercles : mais cette conſtruction ne peut ſervir que lorſque les rayons des extrêmes ſont plus petits que le demi-axe C D : car alors le point g tombant en C, la perpendiculaire tirée du milieu de F C ne couperoit point D C prolongé, elle lui ſeroit parallele ; & ſi ces rayons ſont plus grands, comme il peut arriver, il ſeroit encore impoſſible.

Et ſi la montée C D eſt moindre que le quart du diametre A B, les arcs extrêmes étant d'une courbure trop différente de celle de l'arc du milieu, l'ovale devient d'un contour peu agréable à la vue ; c'eſt pourquoi M. *Camus* propoſe d'y remédier par une anſe de panier à cinq centres, dont il donne la conſtruction que nous rapporterons, après que nous aurons parlé de ſon problême pour trois centres, dont celui du milieu eſt donné.

PROBLEME II.

Les deux axes d'une anſe de panier à trois arcs de cercles étant donnés, & le centre de celui du milieu ou ſon rayon, tracer l'anſe de panier.

Fig. 97. On portera ſur A B la longueur du rayon XD donné de A en *f*, d'où l'on tirera *f* X, qu'on diviſera en deux également au point O, ſur lequel on élevera la perpendiculaire O F, qui coupera A B en F, où ſera le centre d'un des arcs extrêmes, par lequel on tirera X I & ſon égale X E, les points I & E ſeront ceux de jonction des trois arcs A I, I E, E B qui ne feront point de jarret, parce que les deux centres des arcs contigus ſont chacun ſur une même ligne, ſuivant notre regle générale.

PROBLEME III.

Les deux axes étant donnés, & les centres des deux arcs extrêmes, tracer une anſe de panier compoſée de cinq arcs de cercles.

Comme ce problême peut être réſolu de pluſieurs façons, on y détermine les deux arcs extrêmes, le nombre de degrés de ces arcs, ſçavoir ceux-ci de 60 degrés chacun, leurs contigus intermédiaires de 15, & celui du milieu de 30; ce qui fait en tout 180 degrés, valeur du demi-cercle.

De l'intervalle F*f* pour rayon, & d'un de ces deux points F ou *f* pour centre, on fera un arc qui coupera DC prolongé en Q, d'où l'on tirera par les points F & *f* les lignes QE, Q*e*; enſuite du point Q pour centre, & QE pour rayon, on tracera l'arc EH*e* qui coupera la montée CD prolongée en H d'une petite quantité qu'il faut porter quinze fois de Q en S ſur la même prolongation en bas; puis ayant porté la longueur QS ſur QE & ſur Q*e*, on aura les points R, P par leſquels & par le point *f* on tirera les lignes SRG, SP*g* qui détermineront les points G & *g* de jonction des arcs intermédiaires EG, *eg* avec celui du milieu, dont les centres ſont aux points R & P. Ainſi on a les cinq centres propoſés, ſçavoir les deux extrêmes F & *f* ſur l'axe, les deux moyens R & P au deſſous, & celui de l'arc du milieu, qui eſt le 5[e] en en *S*; ce qu'il falloit trouver, pour empêcher qu'il n'y ait des jarrets au contour de l'anſe de panier, en ce que les deux centres des arcs contigus ſont toujours ſur une même ligne. *Fig.* 98.

Nous ne mettrons point ici la démonſtration des moyens par leſquels on eſt parvenu à cette conſtruction; on peut la voir dans les Elémens de Géométrie de M. *Camus*, qui en eſt l'inventeur: ils ſont entre

les mains de tous les *Ingénieurs militaires*, à qui le Roi en a fait présent.

Quoique cet Auteur ait démontré le peu de différence qu'il y a du contour de ces anses de panier avec les ellipses géométriques, & que leur construction paroisse plus facile dans l'exécution des arcs de cercle que par les points & les autres manieres organiques que nous avons donnée ci-devant; je crois qu'on doit toujours préférer l'original à la copie, & la régularité réelle à l'apparente.

J'ai encore une raison plus forte, c'est que j'ai montré dans ma Stéréotomie, au second tome, en parlant des voûtes sphéroïdes, qu'outre qu'il n'est pas plus difficile de tracer des ellipses que des ovales, ou anses de panier, c'est qu'on ne peut exécuter ces voûtes sur un plan ovale par des compositions d'arc de cercle, parce que les lits de chaque rang de voussoir ne doivent pas être équidistans; ce qui a induit en erreur tous les Auteurs de la coupe des pierres, comme je l'ai démontré par les faux *traits* qu'ils en ont donnés qui embarrassent les Appareilleurs & les jettent dans des ragréemens & des tâtonnemens sans succès pour la régularité de l'appareil.

SECTION II.

De l'imitation des ellipſes ou de leurs parties par des arcs de cercles, aſſujettis à des tangentes & des points d'attouchemens donnés.

PROBLEME I.

(En terme de l'Art) *faire le cintre d'un arc rampant de deux portions de cercles tangentes aux pieds droits, & à une ligne de ſommité.*

Ce problême ne peut pas toujours être réſolu : pour connoître les cas où il peut l'être, il faut prolonger les pieds droits tangens AP, BR juſqu'à la ligne de ſommité donnée DE, ſur laquelle on portera d'un côté la longueur DP en DG, & ER en EH, & tirer les lignes PG & RH : ſi elles ne concourent pas au même point ſur la ligne DE, le problême ne peut être réſolu par des arcs de cercles. Il faut baiſſer la ligne de ſommité en SO, paſſant parallélement en X, où ces deux lignes ſe croiſent, ou bien l'élever à ce point, ſi la ligne donnée pour ſommité étoit au deſſous : la raiſon de cette impoſſibilité, c'eſt qu'il eſt démontré dans les Elémens de Géométrie, que, ſi d'un point donné hors du cercle, on mene deux tangentes, elles ſont néceſſai- *Fig. 99.*

rement égales entr'elles, & si elles ne le sont pas, c'est une marque que l'arc touché par ces deux tangentes, est une ellipse, lorsque la courbe rentre en elle-même.

Cette correction étant faite, si on en est le maître ; on tirera par les trois points d'attouchement donnés R, X, P, des perpendiculaires à ces trois tangentes, qui se couperont aux points *c* & C, où seront les centres des deux arcs, qui étant rassemblés, en forment un rampant PXR. C. Q. F. F.

COROLLAIRE.

Delà on tire la maniere de faire des arcs rampans de portions de cercles en toutes sortes de positions de lignes données, pourvu que la distance de la ligne de sommité à la ligne de rampe ne soit pas déterminée, mais seulement sa position.

1°. Si la ligne de sommité est horizontale, & les pieds droits à plomb, l'arc rampant sera nécessairement composé de deux quarts de cercles de rayons inégaux, dont on trouvera les centres comme il suit.

Ayant porté la hauteur de la rampe AP en A *b* d'alignement à R A, base horizontale, on divisera R *b* en deux également en C, *Fig.* 100. où l'on élevera la perpendiculaire CH indéfinie, à laquelle on tirera par le point P la perpendiculaire P*c*. Les points *c* & C se-

ront les deux centres des deux arcs de cercles R H & P H, dont le premier ſera tangent aux lignes du pied droit D R, & à la ligne de ſommité horizontale S O, & le ſecond ſera auſſi tangent à la même S O, & au pied droit P A. C. Q. F. F.

Secondement, ſi la rampe eſt parallele à la ligne de ſommité S O, & les pieds droits à plomb. Ayant diviſé R A en deux également en *m*, on lui menera par ce point la perpendiculaire *m* T, qui coupera la ligne de ſommité au point T, par lequel on tirera la perpendiculaire T C, qui coupera R A en C, où ſera le centre du premier arc R T moindre que le quart, & par le point P une parallele à A R qui coupera T C au point *c*, où ſera le centre du petit arc T P plus grand que le quart de cercle ; l'un & l'autre ſeront tangens à la ligne de ſommité au point commun de jonction T, & aux pieds droits D R & A P. C. Q. F. F.

Troiſiémement, ſi la ligne de ſommité donnée de poſition à l'égard de P R, comme D E, & non pas de diſtance, n'eſt ni parallele à la ligne de rampe, ni à l'horizon, on opérera comme il ſuit.

Ayant trouvé le point X, comme il a été dit au commencement de ce problême, pour tirer par ce point une parallele à la ligne donnée, laquelle ſera celle de ſommité, on

lui ménera une perpendiculaire indéfinie Xm, & par les points P & R, des perpendiculaires Pc, R C aux pieds droits A P, RB, qui couperont Xm aux points c, C, dont le premier ſera le centre de l'arc P X, & l'autre de l'arc XR, qui formeront enſemble l'arc rampant P X R.

La juſteſſe de ces opérations eſt évidemment prouvée, en ce qu'elles ſont conformes à notre regle générale. Voyons comment on doit faire lorſque l'on doit employer plus de deux arcs de cercles pour en former un rampant.

PROBLEME II.

La différence donnée des hauteurs d'impoſtes d'un arc rampant, & leur intervalle horizontal (ſans autres hauteurs fixées), le tracer & compoſer d'un auſſi grand nombre d'arcs de cercles que l'on voudra, égaux en nombre de degrés, & inégaux en longueurs de rayons.

Soient données les hauteurs A & P pour impoſtes d'un arc rampant propoſé à compoſer de cinq arcs de cercles raſſemblés.

Sur la hauteur de rampe B P comme diametre, ayant décrit un demi-cercle P E B, on le diviſera en cinq parties égales, par leſquelles on tirera les cordes B.1, 1.2, 2.C, &c. auxquelles on menera des paralleles tangentes

tangentes au cercle pour lui circonſcrire la moitié d'un décagone.

Sur AB prolongée vers E, on portera ſucceſſivement les côtés de ce polygone circonſcrit en 1, 2, 3, 4, E; puis ayant diviſé EA en deux également en *m*, on menera *m*H parallele & égale à BP, ſur laquelle on décrira un demi-cercle avec le même polygone circonſcrit, mais tourné différemment, commençant par porter la moitié d'un pan en H5, ſur P5 parallele à BA, & du point 5 pour centre, on décrira l'arc P*d* juſqu'à l'alignement du côté 4.5 prolongé; enſuite du point 4 pour centre, on décrira l'arc *de* terminé à l'alignement du côté 3.4 prolongé, du point 3 pour centre, & pour rayon 3*e*, on décrira l'arc *ef*; de même du point 2 & 2*f* pour rayon, on décrira l'arc *fg*, & enfin du point 1 l'arc *g*A; ce qui donne l'arc total rampant A*gfed*P tangent aux pieds droits AD & PB aux points de hauteurs données A & P; ce qu'il falloit faire, enſorte que les arcs aſſemblés ne fiſſent point de jarrets, & fuſſent tous d'un même nombre de degrés, quoique de rayons & de contours inégaux. *Fig.* 102.

COROLLAIRE.

Il ſuit de cette pratique, que la courbe, dont eſt formé cet arc rampant, eſt une

portion de ſpirale, compoſée d'arcs de cercles, comme nous le ferons voir dans le problême ſuivant.

PROBLEME III.

Imiter les ſpirales par une compoſition de différens arcs de cercles.

Quoique les contours des lignes ſpirales qu'on emploie dans les ornemens ſoient regardées par les Deſſinateurs, comme devant être plus aſſujetties au goût qu'aux regles de la Géométrie, les Architectes ſe ſont cependant efforcés de donner des regles de préciſion au contour de la volute du chapiteau ionique, ſans pouvoir y parvenir, comme nous le ferons remarquer, après avoir parlé en général de la compoſition de cette courbe par des arcs de cercles.

La plus ſimple & la plus réguliere, eſt celle qui étant établie ſur un axe, qu'ils appellent *cathete*, eſt compoſée de demi-cercles, dont les diametres ſont rangés ſur cette ligne dans une progreſſion qui peut varier à l'infini.

Soit, par exemple, AB l'axe d'une ſpirale à faire d'arcs de cercles en progreſſion ſous-double. Du milieu C ayant décrit un demi-cercle ADB, on diviſera CB en deux également en *m*, d'où, comme centre, on dé-

Fig. 103.

crira de l'autre côté de l'axe le demi-cercle BEC; ſur C*m*, comme diametre, un troiſieme demi-cercle CF*m*, puis un quatrieme *m*G*h*, & enfin un cinquieme *hi* qui marque deux révolutions & demie; ce qu'on peut pouſſer à l'infini, ſuivant cette progreſſion, $1 . \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$, &c. ce qui forme la figure d'une corne de belier, ou de ce coquillage du nombre des nautiles, qu'on appelle *corne d'Ammon*, laquelle ne convient pas à la ſpirale de la volute du chapiteau ionique, qui doit être plus arrondie & moins alongée: ainſi on pourroit, au lieu de la diviſion de moitié, prendre la progreſſion des deux tiers du diametre.

Mais comme des demi-cercles ſont des arcs trop grands pour ne pas laiſſer appercevoir une ſorte d'irrégularité dans la ſuite de la courbe, les Architectes ont jugé avec raiſon qu'elle ſeroit moins ſenſible, en n'en prenant que la moitié, c'eſt-à-dire les quarts du cercle, dont les centres ne ſont plus rangés ſur un axe, mais ſur les ſommets des angles d'un quarré inſcrit dans un petit cercle, qu'ils appellent l'*œil de la volute*, placé au centre du cercle de circonſcription: & pour les quatre quarts de cercles, formans la premiere révolution, comme la volute en fait trois, on inſcrit dans le premier quarré un ſecond & un

troisieme à certaine distance ; ce qui donne douze centres pour autant de quarts de cercles, composant les trois révolutions de la spirale. On peut aussi, sans faire de quarrés, distribuer ces douze centres sur les deux diagonales du premier quarré ; mais cette construction n'est point réguliere.

Défauts de la pratique des Architectes.

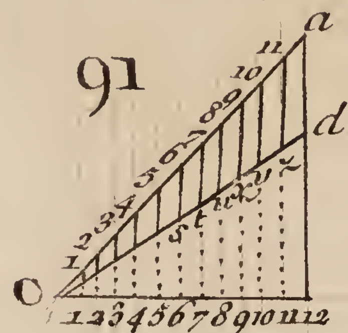
Premiérement, il est clair que les centres étant également éloignés entr'eux de la longueur d'un côté du quarré, ne se rapprochent point comme ils devroient faire pour passer insensiblement de la premiere révolution à la seconde, comme on a vu dans la précédente spirale.

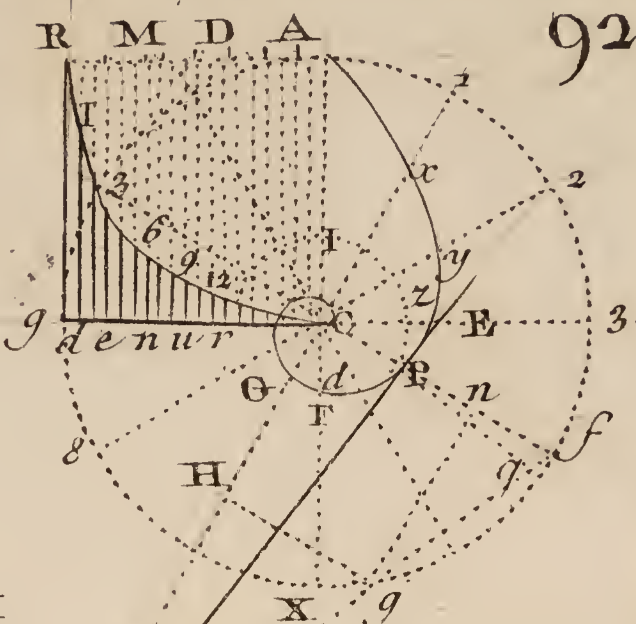
Le second défaut est dans la transition de la premiere révolution à la seconde, où il y a deux irrégularités.

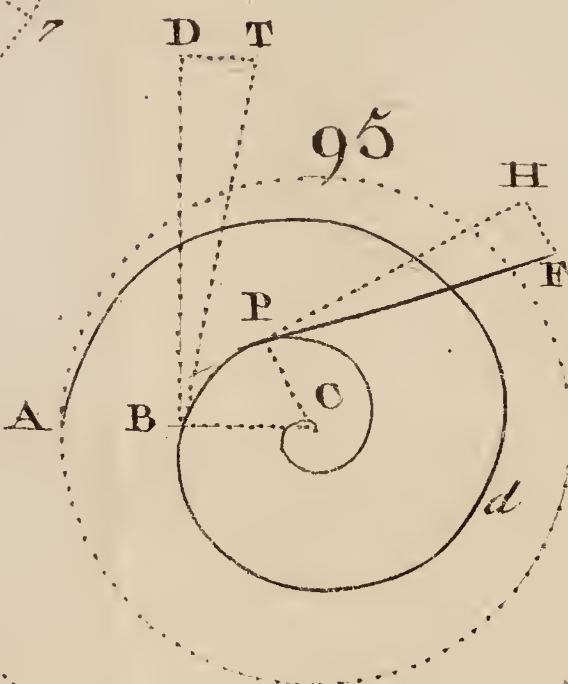
L'une que le rayon du cinquieme quart de cercle, qui commence la seconde révolution, ne diminue pas proportionnellement aux quatre précédens, suivant une progression nécessaire à la régularité de la spirale, puisque la distance du quatrieme au cinquieme centre est plus petite que celle du 3[e] au quatrieme.

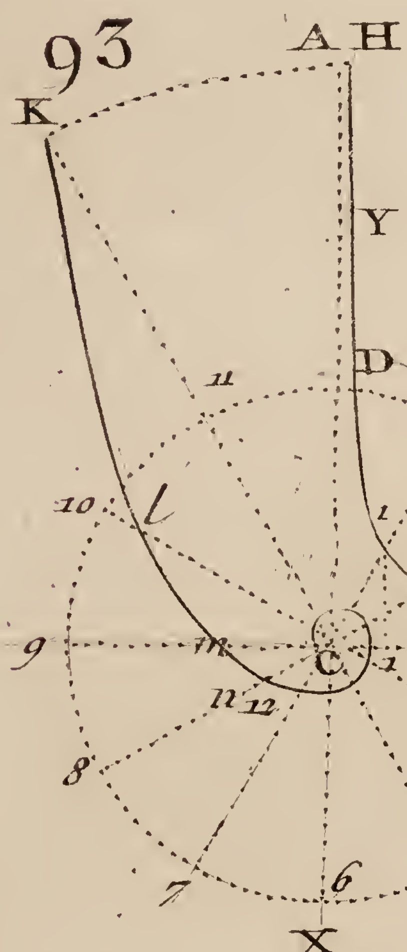
L'autre, que les deux rayons du 4[e] & du

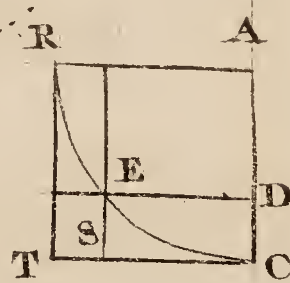

Fig. 90.
B
A
C
D
P
z
y
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

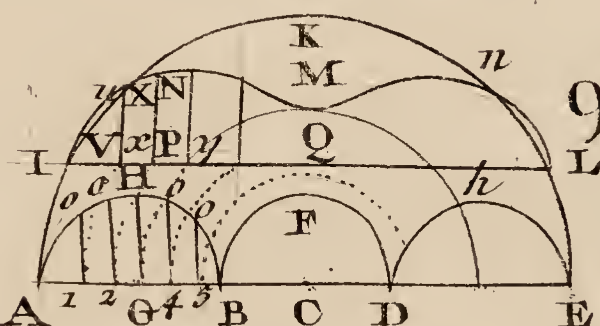

91
a
d
C
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

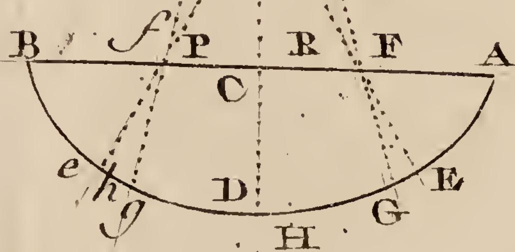

92
R M D A
x
y
z
E
3
g
d e n u r
G
F
P
n
f
q
H
X
g

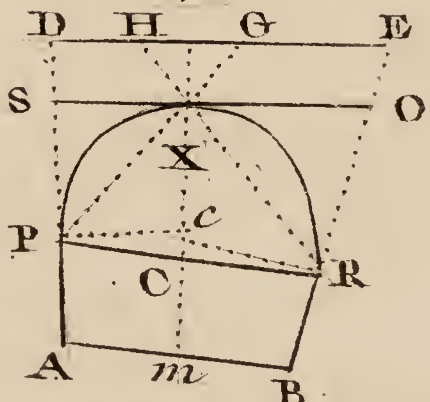

D T
95
H
F
P
A
B
C
d

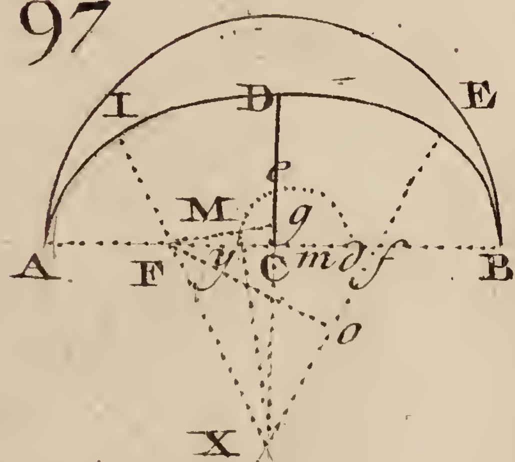

93
A H
K
Y
D
V
R
l
m
C
P
n
X

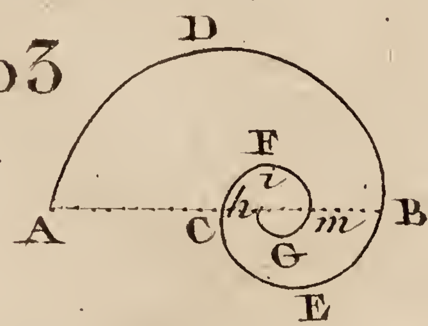

R A
94
E
D
S
T C

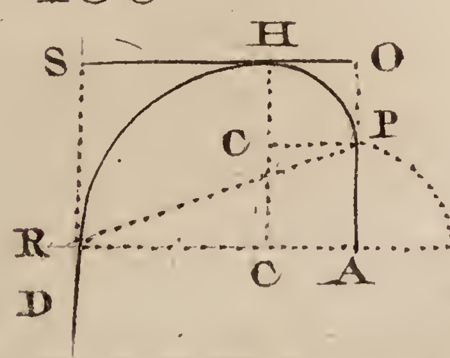

K
M
n
96
I
Q
L
h
F
A B C D E

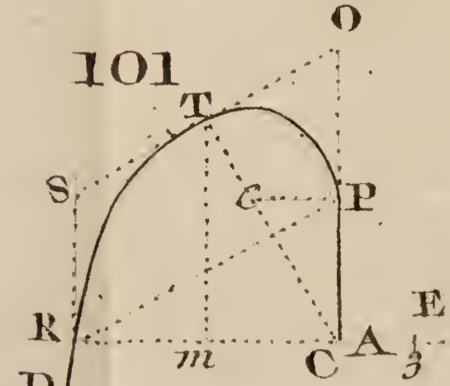

S
Q
98
B f P R F A
C
e
h
g
D
G
E
H

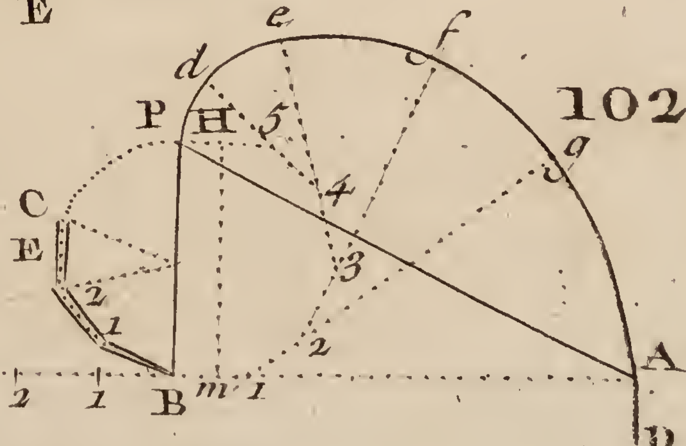

99
D H G E
S
O
X
P
c
C
R
A
m
B


97
I
D
E
M
g
A
F
y
C
m
d
f
B
o
X


D
103
F
A
C
h
m
B
G
E


100
S H O
C
P
R
C A
b
D


101
O
T
S
P
R
m
C A
D


e
f
d
102
P H
g
C
E
A
B
D

5e quart de cercle ne ſont plus ſur une même ligne droite : par conſéquent ils ne ſeront pas tous deux perpendiculaires à la même tangente au point de jonction des arcs ; il y en aura donc un des deux incliné à ce même point : par conſéquent il y aura en ce point de jonction un jarret ; je conviens qu'il ne ſera pas beaucoup ſenſible, mais il doit l'être à l'œil délicat, & s'il ne l'eſt pas, il le ſera toujours à l'eſprit géométrique, qui aura lieu de n'être pas ſatisfait.

Troiſiémement, que la diminution des rayons du cinquieme au ſixieme centre n'eſt plus dans la même progreſſion que du quatrieme au cinquieme ; il en eſt de même, & avec le même défaut du 8 au 9, que du 4 au cinq, à peu de choſe près.

Goldman s'étant apperçu des défauts de la tranſition du 4 au 5, & du 8 au 9, a trouvé un moyen de placer ces centres dans la même ligne, en inſcrivant les quarrés intérieurs aux angles deſquels ſont les centres, non à des diſtances égales, comme les Auteurs des Livres d'architecture, qui l'avoient précédé, l'avoient enſeigné, mais en les rangeant ſur un côté commun 1 . 4. Par cet ingénieux moyen, les centres 4 & 5 du paſſage de la premiere à la ſeconde révolution qui étoient écartés, ſe trouvent ici ſur *Fig.* 104.

la même ligne, de même que le 8e & 9e, qui font le passage de la seconde à la troisieme révolution; ce qui corrige parfaitement les jarrêts que j'ai reprochés aux constructions antérieures.

Daviler admirant cette ingénieuse invention, lui a prodigué le nom de *géométrique*; mais il n'a pas fait attention qu'il restoit encore à corriger l'inégalité de progression, de diminution des longueurs des rayons qui se font, suivant les nombres 3, 6, 6, 6, 5, 4, 4, 4, 3, 2, 2, 2, lesquels ne font point de suite de progression uniforme : par conséquent les quarts de cercles assemblés ne peuvent former une spirale géométrique, mais faire ces irrégularités, que l'œil, à la vérité, ne peut appercevoir, parce que les arcs sont joints à des points d'attouchemens communs, où ils ne font point de jarrets, mais elles sont suffisamment sensibles au raisonnement, pour ne pas admettre le nom de description géométrique.

Celle que *Vignole* donne, suivant la progression des tangentes, en auroit approché, s'il avoit sçu les joindre par des arcs de cercles qu'il laisse chercher en tâtonnant; ce qui ne signifie rien.

Il nous reste à donner la maniere d'inscrire une seconde spirale dans une premiere, pour lui servir de compagne, en terminant

un côté de la côte d'une volute, ſoit dans le chapiteau ionique, ſoit ailleurs.

Si l'on ſe ſert de la maniere de *Goldman* pour déterminer les centres des quarts de cercles ſur les angles d'une ſuite de quarrés, il eſt clair qu'il n'y a qu'à y inſcrire la même figure plus petite, dont le côté peut être trouvé par cette analogie, comme le rayon de la premiere ſpirale eſt à celui de la compagne, qui eſt donné par l'intervalle de la largeur de la côte : ainſi le côté du quarré inſcrit dans l'*œil* de la volute eſt à celui de la ſpirale intérieure ;

Ou bien ſans calcul, en faiſant un triangle avec la longueur du grand rayon 3A du côté du quarré, de l'œil A1 égal à 1.2, & *Fig. 104.* portant ſur A C la largeur de la côte donnée A*a* pour élever au point *a* une parallele A*b* au côté A1, laquelle coupera C1 au point *b*, qui donnera la longueur *ab* pour le côté du quarré intérieur, & par conſéquent la poſition des ſeconds centres de la compagne que l'on doit décrire pour régler la diminution de la côte de la volute.

PROBLEME IV.

Alonger ou rélargir, ou incliner une ſpirale, ou toute autre courbe, comme l'on voudra, ſans altérer le rapport de leurs contours.

Fig. 105. C'eſt ici un problême de deſſein des plus faciles à réſoudre, par la grille de quarrés égaux entr'eux, qu'on change en parallélogrammes rectangles, plus hauts ou plus larges que les quarrés; où ſi l'on veut faire la figure inclinée, qu'on appelle *rampante*, on doit faire ces parallélogrammes, ſuivant un angle donné, & inſcrire dans chaque partie des parallélogrammes celle de la courbe originale qui traverſe les quarrés, ou diagonalement, ou obliquement, ce que peuvent exécuter tous ceux qui ſçavent un peu deſſiner, comme l'on voit dans le rapport des deux figures; ce qui tombe ſouvent, en cas de pratique, aux ornemens & baluſtrades des rampes d'eſçaliers.



QUATRIEME PARTIE.

De la description des figures des sections des corps qui ne doivent ou ne peuvent être décrites que sur des surfaces concaves ou convexes.

NOUS n'avons parlé jusqu'ici que des sections faites par des plans coupans des corps ronds, lesquelles peuvent être par conséquent tracées sur les surfaces planes qui les ont formé. Il s'agit présentement de les tracer sur les surfaces courbes qui leur sont naturelles, comme celles des spheres, cônes, cylindres, anneaux, & autres.

Nous avons de plus à décrire celles qui se font par la pénétration mutuelle de ces corps à leurs surfaces, qui peuvent quelquefois être décrites sur des plans, mais le plus souvent ne peuvent l'être que sur des surfaces concaves ou convexes, égales à celles où elles ont été formées; on appelle celles-ci, *courbes à double courbure*, auxquelles on peut assigner, comme aux corps solides, trois dimensions, longueur, largeur & profondeur.

Mais comme dans une deſcription ſur une ſurface plane, on ne peut exprimer ces trois dimenſions, on a imaginé de repréſenter ces courbes par le moyen de la *projection*, qui n'en eſt qu'une repréſentation défigurée, mais qui ſert de moyen pour parvenir à la repréſentation exacte que l'on en doit faire ſur la ſurface concave ou convexe qu'on doit former pour la décrire dans toute l'exactitude, comme nous allons l'expliquer.

De la projection.

Ce mot qui vient du Latin *projicere* jetter, peut avoir pluſieurs ſignifications, comme à jetter des bombes, & autres choſes.

Il ſignifie, pour notre ſujet, la repréſentation d'un corps, des angles, & des contours duquel on ſuppoſe une infinité de perpendiculaires tomber ſur un plan, où leur continuité forment une trace: telle eſt celle de l'égoût des eaux de pluie tombant autour d'un toit; cette comparaiſon fait cependant connoître qu'il n'eſt pas néceſſaire que ces lignes ſoient toujours exactement perpendiculaires au plan où elles ſe terminent, pourvu qu'elles ſoient toujours paralleles entr'elles: car ſi ce toit eſt circulaire, comme celui d'une tour ronde, &

que le terrein ſoit de niveau, la trace des gouttes d'eau y décrira un cercle ; mais ſi cette tour étoit ſur le penchant d'un glacis, la trace de l'égoût y décriroit une ellipſe, qui ſeroit cependant l'effet de la même projection reçue ſur un plan, auquel la chûte de l'égoût n'eſt pas perpendiculaire.

De cet exemple familier, nous déduirons des conſéquences ſenſibles à l'égard de notre projection.

1°. Que la projection d'une ligne peut n'être qu'un point, comme l'égoût d'un fil mouillé & à plomb ne donnera qu'une goutte d'eau, tombant ſucceſſivement toujours au même point.

2°. Que la projection d'une ſurface plane, en ſituation perpendiculaire au plan de projection, n'eſt qu'une ligne : tel eſt l'égoût d'une feuille de fer blanc, expoſée à la pluie en ſituation verticale, qui ne fera ſur le terrein uni qu'une trace de ligne droite.

3°. Que la projection d'un corps ſolide ne peut être que le contour d'une ſurface.

4°. Que ce contour ne peut exprimer qu'une poſition du corps ; car la trace de la gouttiere peut varier de pluſieurs façons à l'égard du même corps, en changeant ſa ſituation : par exemple, ſi l'on ſuppoſe un cube, comme un gros dez, expoſé à la pluie, ſon égoût ne fera un quarré parfait

que lorſqu'il ſera poſé à plat ſur un de ſes quarrés en ſituation horizontale : s'il eſt poſé ſur une de ſes arêtes, ſa projection ſera un parallélogramme égal à la diagonale, ſi elle eſt perpendiculaire au plan horizontal, & ſi le même dez eſt poſé ſur un de ſes angles, enſorte que ſon oppoſé diagonalement ſoit à plomb de celui ſur lequel on le ſuppoſe appuyé dans ce point d'équilibre, la trace de ſon égoût ſera un *exagone.*

Si au lieu de cet égoût, en lignes verticales ſur un plan horizontal, on ſuppoſoit des lignes horizontales ſur un plan vertical, il en réſulteroit toujours le même effet des traces qui ne changeroient que de nom.

Ainſi le premier exemple d'une projection horizontale s'appelleroit le *plan horizontal* ou *ichnographie.* Dans la ſeconde ſuppoſition d'une projection verticale, la trace s'appelle *profil*, *coupe*, ou *élévation*, ſuivant les circonſtances de la repréſentation.

Obſervation générale.

La projection raccourcit toutes les lignes & ſurfaces qui ne ſont pas paralleles au plan de projection.

Cette vérité eſt aſſez ſenſible pour n'avoir pas beſoin d'être démontrée ; car ſi la

ligne A B eſt projettée ſur un plan D E en *b a*, il eſt clair que B*c* & *b a* étant ſuppoſées paralleles ſont égales, mais B A eſt à *bc* comme l'hypoténuſe au côté, lequel eſt par conſéquent plus petit. *Fig.* 106.

Si B A C eſt une ſurface en triangle rectangle, poſé verticalement, ſa projection ne ſera encore que la ligne *b a*, parce que les points A & C ſont confondus dans le ſeul point *a*, ſuppoſant cette ligne verticale, comme nous venons de le dire.

Mais ſi le triangle eſt incliné à l'horizon, comme F G H, ſa projection ſera encore un triangle, mais tout différent : car le côté G F, qui eſt plus grand que G H, peut ſe trouver dans la repréſentation *gf* plus petit que *gh*, & le triangle G H F rectangle en H eſt obtuſangle dans ſa projection. *Fig.* 107.

Seconde obſervation.

Les projections des lignes courbes qui ſont dans un plan perpendiculaire à un ou pluſieurs autres plans de projection ſont des lignes droites, dont les diviſions faites par des paralleles menées par pluſieurs points de ces courbes, ſont toujours en mêmes raiſons que les abſciſſes co-ordonnées. *Fig.* 108.

La raiſon de la premiere partie eſt que la projection alors n'eſt plus celle de la

courbure, mais du plan dans lequel elle eſt.

La raiſon de la ſeconde, conſiſte en ce que ce n'eſt pas la projection de la courbure que l'on voit repréſentée, mais celle des lignes droites qui y ſont inſcrites, ſuppoſées paralleles entr'elles, & coupées proportionnellement par d'autres lignes plus ou moins obliques.

CHAPITRE I.

De la deſcription du cercle ſur des ſurfaces concaves ou convexes de la ſphere du cône & du cylindre.

PROBLEME I.

Faire paſſer un cercle par trois points donnés ſur la ſurface concave ou convexe de la ſphere.

DANS la théorie on ne fait point de différence des propriétés d'une ſurface conſidérée par ſa concavité, ou par ſa convexité; il n'en eſt pas de même dans la pratique des Arts, il eſt plus facile d'opérer ſur la concave que ſur la convexe.

Premiérement, s'il s'agit de décrire un cercle majeur, c'eſt-à dire qui paſſe par le centre de la ſphere dans la ſurface con-

cave, il ſuffit qu'on ait deux points donnés, dès que le diametre de la ſphere eſt connu, & que ces deux points ne ſont pas diamétralement oppoſés, parce qu'il eſt évident, par la génération de la ſphere conſidérée comme la révolution d'un demi-cercle autour de ſon diametre, que tous les cercles majeurs imaginables peuvent paſſer par ces deux points, qui deviennent alors les poles de la ſphere.

Si les deux points donnés ſont moins éloignés que de 180 degrés, on ne peut y faire paſſer qu'un cercle majeur, mais une infinité de mineurs de différentes grandeurs; de ſorte que pour en déterminer la poſition, il faut néceſſairement avoir trois points donnés à la circonférence.

Soit ces trois points A, B, E dans la ſurface concave de la ſphere, on en meſurera les diſtances par leurs cordes, dont on formera ſur une ſurface plane ſéparément un triangle A B E, aux côtés duquel A B & A E on menera les perpendiculaires B *d*, E *d* par leurs extrêmités B & E, leſquelles ſe couperont en *d*. Si l'on tire A *d*, on aura le diametre du cercle propoſé à décrire dans la ſurface concave de la ſphere. *Fig.* 109.

D'un point P pour pole, pris à volonté, on décrira un cercle, dont le diametre ſera celui qu'on vient de trouver.

Fig. 110. Puis on fera à part, ſur une ſurface plane, un triangle iſoſcele A P*d*, compoſé du diametre trouvé A*d*, & des deux diſtances égales de ce diametre au pole P, qui a ſervi à décrire le cercle mineur, auxquelles ſi l'on tire des perpendiculaires A X, *d*X par leurs extrêmités A & *d*, elles ſe couperont au point X, où ſera une des extrêmités du diametre de la ſphere, dont l'autre eſt en P : ainſi P X étant trouvé, on aura ſa moitié en C pour le centre de la ſphere, & C P ou C X pour ſon rayon.

Préſentement ſi l'on veut tracer dans ſa ſurface concave un cercle majeur par deux points donnés, on fera un triangle rectangle iſoſcele P C D, dont les côtés ſeront *Fig.* 111. égaux au rayon trouvé P C ; l'hypoténuſe P D ſera la longueur du cordeau qui doit ſervir à tracer ce cercle majeur, dont on doit chercher le pole, qui ſera déterminé par les points donnés à ſa circonférence, par exemple E & F, deſquels comme centres, & du cordeau C P pour rayon, on tracera dans la ſurface concave deux arcs de cercles qui ſe couperont en un point O, où ſera le pole du cercle majeur demandé, duquel on le tracera avec le même cordeau fixé en O, non comme d'un centre qui differe du pole, en ce qu'il eſt ſur une ſurface plane, & que le pole peut être conſidéré

ſidéré comme le ſommet d'un cône, dont le côté eſt le cordeau, & le cercle demandé la circonférence de la baſe. C. Q. F. F.

Si au lieu d'un cercle majeur on demande un cercle mineur, qui doit paſſer par trois points donnés 1 . 2 . 3, il faut chercher & trouver le diametre de la ſphere, comme nous venons de le dire; puis ayant décrit à part ſur une ſurface plane un cercle par les trois points donnés de diſtances relatives, on en inſcrira le diametre *mn* dans un arc de cercle majeur MPI, dont on a le rayon MC par l'article précédent, lequel arc étant diviſé en deux également en P, déterminera ce point pour le pole du cercle mineur: ainſi fixant un cordeau *m*P dans la ſurface concave de la ſphere en P, on y tracera le cercle mineur demandé *m*. 3. 2, *n*. 1. C. Q. F. F.

Nous avons ſuppoſé juſqu'ici que l'opération devoit ſe faire dans la ſurface concave de la ſphere, qui eſt celle dont il s'agit le plus communément dans les ouvrages d'architecture, qui ſont rarement extradoſſés; mais ſuppoſant qu'ils le puiſſent être, & que les cercles à décrire ne fuſſent ni de niveau ni à plomb, qui ſont les cas les plus ordinaires, où l'on n'a pas beſoin d'opération géométrique, il faudroit tirer une perpendiculaire au rayon *mc* dans l'é-

pure qui couperoit le diametre ou le rayon CP prolongé en S, la diſtance *Sm* feroit la longueur d'un cordeau qu'il faudroit attacher au ſommet d'une perche P S au deſſus de l'extrados de la voûte ſphérique, avec lequel on traceroit le cercle, qui ſeroit celui qu'on demande, en tournant tout autour, parce que cette ligne *m* S étant tangente à la ſurface concave de la ſphere, ne la toucheroit qu'à la diſtance *m* & *n*, ſans aucun frottement qui pût faire plier & varier le cordeau en longueur.

Il faut cependant obſerver que cette pratique ne pourroit ſervir à tracer un cercle majeur ſur la ſurface convexe de la ſphere, parce que la tangente deviendroit infiniment longue, devenant alors parallele à l'axe. Dans cette circonſtance, on ne peut opérer que par l'*à-plomb* & le *niveau* par petites parties jointes enſemble bout à bout : c'eſt ainſi que le font ces côtes de plomb, ſouvent dorées ſur les couvertures extérieures des dômes modernes, comme on voit aux Invalides & ailleurs ; il eſt même rare qu'on les faſſe exactement ſphériques, mais alongés en ſphéroïdes, qui ont beaucoup plus de grace, comme on le voit, en comparant le dôme de l'Aſſomption circulaire avec celui des Invalides qui eſt ſurmonté.

La démonſtration des opérations que nous venons de faire aux fig. 109 & 110, eſt fondée ſur cette propoſition élémentaire, *Eucl.* Livre III, p. 31, que l'angle dans le demi-cercle eſt droit, & par conſéquent appuyé ſur le diametre: or les angles A B *d* & A E *d* ſont droits par la conſtruction, de même que les angles X A P, X *d* P: donc les lignes A *d* & P X ſont des diametres des cercles qui paſſent le premier par les points donnés A B E, & le trouvé *d*. Le ſecond par les points donnés A P *d* & le trouvé X dans une ſurface plane, & qui ſe trouvent adaptés à la ſurface concave de la ſphere, où les poles, qui ne ſont pas dans une ſurface plane, doivent être conſidérés comme les ſommets des cônes droits ſur leurs baſes, dont on a trouvé les diametres, & leurs côtés P *m* ou P *n* pour les cercles mineurs, fig. 111, ou P A & P *d*, fig. 110, & P M ou P I pour le cercle majeur, paſſant par le centre de la ſphere; ce qui eſt viſible par la conſtruction.

USAGE.

Les inſcriptions des cercles dans les dômes ſphériques ne ſont pas rares, lorſqu'on veut y pratiquer des ornemens de *ſtuc* ou de *peinture*, comme l'on fait très-fréquemment en Italie, où on les peint à freſque

par compartimens, bordés de ſculpture en ſtuc ; on y voit auſſi quelquefois des compartimens de lambris d'arcs de cercles, qui en ſe croiſant forment des encaiſſemens quadrilateres curvilignes, dont les platfonds ſont ornés de ſculptures & de roſons : pour exécuter un tel ouvrage, la propoſition précédente eſt eſſentielle.

PROBLEME II.

Par un point donné à la ſurface concave ou convexe d'un cylindre, tracer un cercle.

Premiérement dans la ſurface concave, ſi le cylindre eſt droit, & ſa baſe apparente, il ne s'agit que de lui mener un contour parallele, en portant la diſtance du point donné à cette baſe, perpendiculairement à ſon plan, & de près en près pour avoir pluſieurs points, par leſquels on trace ce cercle par le moyen d'une regle pliante.

Si la baſe eſt oblique ou indéterminée, il faut commencer par trouver des paralleles à l'axe du cylindre comme il ſuit, on *Fig.* 112. prendra une regle ou un cordeau A B à un des bouts d'une longueur meſurée, touchant à la ſurface concave par ces deux extrêmités ; & en ayant porté une autre parfaitement égale, & poſée à l'autre bout parallélement à la premiere, en meſurant l'in-

tervalle A*a*, auquel on fera *b*B parfaitement égal, on dégauchira les deux lignes AB, *ab* en borneyant, c'eſt-à-dire en regardant du point O, un peu écarté, de maniere que la regle AB lui cache tellement l'autre *ab*, qu'elles ne ſe croiſent point, enſorte qu'elles ſoient exactement dans le même plan ; alors on ſera aſſuré que les quatre lignes A*a*, B*b* formeront un parallélogramme, & que les côtés A*a* & B*b* ſeront paralleles à l'axe du cylindre, ſoit que ce parallélogramme ſoit rectangle, ſoit qu'il ſoit obliqu'angle.

On tirera enſuite dans cette ſurface concave autant de paralleles à A*a* qu'on voudra avoir de points à la circonférence du cercle demandé, & par le point donné *d*, on leur fera une ſuite de perpendiculaires *dx* qui donneront chacune un point ſur chaque parallele à l'axe, par leſquels, avec une regle pliante, on tracera le cercle demandé.

S'il falloit faire cette opération dans une ſurface fermée par les deux bouts, comme dans une voûte en berceau, terminée par des murs, où l'on ne puiſſe pas borneyer les deux cordes AB, *ab* l'une par l'autre, pour les mettre dans le même plan, il n'y a qu'à tendre deux cordeaux en diagonale de A en *b* d'un côté à l'autre, & de *a* en B de

l'autre, ſi étant bien tendues elles ſe touchent au milieu où elles ſe croiſent, elles ſeront dans le même plan; ſi elles laiſſent un intervalle entr'elles, c'eſt marque qu'elles n'y ſont pas, & qu'il faut hauſſer ou baiſſer un des bouts, juſqu'à ce qu'elles ſe touchent, étant bien & également tendues, ſans s'appuyer l'une ſur l'autre.

La démonſtration de cette opération ſera facile à appercevoir, 1°. ſi l'on fait attention que des cordes égales A B & *a b* ſoutendent des arcs égaux A E B, *a e b*; 2°. que les ſections d'un cylindre, parallélement à l'axe, ſont des parallélogrammes; 3°. que toutes les paralleles à l'axe ſont paralleles entr'elles, & qu'enfin dans le cylindre *droit* ſur ſa baſe, la ſection perpendiculaire à l'axe eſt un cercle.

Fig. 112. Quant à la maniere de mettre les cordes A B & *a b* dans un même plan, on ſçait par les élémens que trois lignes qui ſe coupent ſont dans un même plan: ainſi les deux rayons viſuels partant du point O & la corde *a b* font un triangle O*a b*, & les mêmes rayons, coupant auſſi la corde A B en *i* & *k*, font auſſi un triangle O*i k* dans le même plan: donc *i k* & *a b* ſont dans le même plan; ce qu'il falloit faire pour que la ſection A*a b*B fût un parallélogramme. Par la même raiſon A *b* B font un triangle: donc

les trois lignes A*b*, cordeau de la diagonale, *b* B côté du cylindre, & A B la corde, sont nécessairement dans un même plan ; mais par l'article précédent, A B & *a b* sont dans le même plan : donc l'autre diagonale *a* B sera aussi dans le même plan : par conséquent l'une & l'autre doivent se toucher à leur intersection, puisqu'elle sont dans le même plan.

Cette observation fournit un moyen facile de reconnoître si une porte ou une table est exactement plane, ou s'il y a du gauche, en tendant deux fils d'un angle opposé à l'autre qui se croisent au milieu.

Nous venons de donner la maniere de tracer un cercle dans une surface concave cylindrique, qui a souvent son application dans la pratique, il faut voir comment on doit le faire sur la surface convexe.

Comme cette opération, ainsi que la précédente, dépend du moyen de trouver une droite parallele à l'axe, si les bases du cylindre sont libres, il sera facile d'y appliquer la même pratique, en prenant des cordes égales aux bouts opposés, & les mettant dans le même plan, par le moyen de deux regles qui excedent de part & d'autre la longueur de ces cordes, qu'on pourra bornoyer, comme nous l'avons dit, en écartant l'œil, & tournant ces regles opposées,

de maniere que la premiere couvre la seconde; & tirant des lignes d'un bout d'une corde à l'autre, lesquelles seront droites, & les côtés d'un parallélogramme, comme dans le cas précédent. Mais si les bases étoient embarrassées, il faudroit appliquer sur le côté du cylindre une regle ou une planche jaugée de largeur derriere la convexité en longueur, & la hausser & baisser, jusqu'à ce qu'en se reculant, son arête s'alignât avec la surface aux points d'attouchemens du rayon visuel; alors en traçant une ligne le long de la regle où elle touche le cylindre, on aura une parallele à l'axe qui suffit pour en tracer d'autres, & leur faire des sections perpendiculaires par où le cercle demandé doit passer.

On peut aussi, par une maniere méchanique, trouver la position de deux points d'une ligne parallele à l'axe, sur un petit objet, c'est de tracer par un point, pris à volonté, une circonférence avec un compas sur la surface convexe d'un rayon le plus grand qu'on pourra; puis de la même ouverture, on fera sur du papier ou sur du carton un cercle, dont on appliquera le contour, en le pliant sur la surface courbe, ensorte que le centre soit exactement sur le précédent; ces deux contours se croiseront en deux points, qui seront sur le côté droit

du cylindre, parce que le rayon du cercle étant plié, ſera plus court partout ailleurs que ſur ce côté, où il ſera couché à plat, & égal à celui de la premiere trace, avec laquelle il ne peut convenir qu'aux deux extrêmités d'un diametre, où ces deux courbes différentes ſe croiſeront.

Tout ce que nous venons de dire pour tracer des paralleles à l'axe du cylindre, n'eſt qu'un préparatif pour tracer dans ſa ſurface concave ou ſur la convexe un cercle paſſant par un point donné, dont voici la pratique.

Ayant tracé autant de paralleles à l'axe qu'on voudra avoir de points à la circonférence du cercle demandé, on tracera une perpendiculaire à la parallele, ſur laquelle eſt le point donné D, en opérant, comme l'on feroit ſur une ſurface plane, faiſant des points 1 & 2 pour centre équidiſtans de D, une ſection d'arcs de cercles en E ſur *Fig.* 113.
la parallele la plus prochaine, puis des points 3 & 4 équidiſtans de E une interſection ſur la parallele ſuivante en F, ainſi de ſuite en G; ſoit dans la ſurface concave, ou ſur la ſurface convexe, on appliquera d'un point à l'autre, ou pluſieurs enſemble, une regle pliante, au long de laquelle on tracera le cercle demandé, qui ſera exact, ſi le cylindre eſt droit, mais s'il étoit ſca-

lene, le développement de ce cercle ne feroit plus en ligne droite, comme nous le montrerons ci-après.

USAGE.

Ce problême est en quelque façon le fondamental de la construction des voûtes en berceau, parce qu'il donne la maniere de trouver cette courbe, qu'on appelle l'*arc droit*, c'est-à-dire celui de la section perpendiculaire à l'axe du cylindre, & à ses paralleles, qui en sont les côtés, suivant laquelle le plan de ces modeles, qu'on appelle *panneaux*, doivent être posés pour diriger le contour de l'excavation de la pierre, en les appliquant sur le massif, & de ces autres modeles, qu'on appelle *cerches*, qui se mettent en dehors pour la même fin, lesquelles sont tournées en sens contraire au parement de la pierre, c'est-à-dire convexes pour la partie concave, & concaves pour être appliquées à une surface convexe, mais toujours dans le plan de la section perpendiculaire à l'axe, qu'on appelle l'*arc droit*, laquelle position est de conséquence : car si le plan de ce modele s'en écarte par quelque obliquité, son contour indiqueroit un arc circulaire, ou il en faudroit un elliptique, comme nous l'avons dit en parlant de la nature des sections du cylindre.

PROBLEME III.

Par un point donné à la ſurface concave ou convexe d'un cône droit ou ſcalene, trouver un cercle.

On ſçait qu'il y a deux ſortes de cônes: celui dont l'axe eſt perpendiculaire à ſa baſe, eſt appellé *droit;* s'il eſt oblique, on l'appelle *ſcalene.*

On peut cependant appeller, droit ſur une baſe elliptique, celui dont l'axe eſt perpendiculaire à une baſe de ce genre de courbe, qui n'eſt pas la naturelle, qu'on ſuppoſe toujours circulaire, par la génération de ce ſolide, qu'on conſidere comme formé par la révolution d'un triangle rectangle, tournant autour d'un de ces côtés; d'où il ſuit que toutes les ſections paralleles à la baſe ſont des cercles: ainſi il n'y a rien de plus facile que de tracer un cercle ſur la ſurface d'un cône droit par un point donné, ſi l'on en a le ſommet S, parce qu'il n'y a qu'à y attacher un bout de cordeau de la longueur donnée SD, & tourner tout autour avec un crayon à l'autre bout. *Fig.* 114

Mais ſi l'on n'a pas le ſommet, comme lorſqu'il s'agit d'un cône tronqué, il faut tracer à ſa ſurface des côtés droits, dont la direction doit tendre de la baſe au ſommet, ſi le cône étoit complet.

Pour trouver ces lignes droites ſur cette ſurface courbe, il faut opérer à peu près comme l'on a fait à l'égard du cylindre, par le moyen de deux regles poſées ſur les centres de la baſe ſupérieure & inférieure, & bornoyées l'une par l'autre pour les mettre dans le même plan, qui paſſeroit par l'axe du cône; puis marquer les points où ces regles coupent la circonférence ſupérieure & inférieure, & tirer des lignes droites de l'un à l'autre, ſur leſquelles on portera les diſtances de la baſe au point donné, & multipliant ces lignes autant qu'on voudra y marquer de points équidiſtans de la baſe, par leſquels on tracera le cercle demandé à la main, ou avec une baguette ronde pliante, & non pas avec une regle pliante, comme nous l'avons dit pour le cylindre, parce que le développement du cercle ſur le cône n'eſt pas une ligne droite comme ſur le cylindre droit, mais un arc de cercle, qui a pour rayon la diſtance du ſommet ſuppoſé au point donné à la ſurface.

Mais ſi le cône eſt droit ſur une baſe elliptique, le problême devient difficile, parce que le contour de la ſection circulaire n'eſt pas parallele à la baſe, mais celle d'un plan incliné à l'axe du cône, ſuivant un angle qu'il faut trouver. Ce problême

étoit nouveau dans le tems que je fis ma Stéréotomie, & j'en dois la ſolution à MM. *Jean Bernoulli*, pere & fils, qui m'en ont fourni deux, dont voici la plus ſimple.

Par un point donné à la ſurface d'un cône droit ſur une baſe elliptique, y tracer un cercle.

Soit ASB la ſection par l'axe du cône, dont ADB eſt la moitié de la baſe, CD la moitié du grand axe avec ſon foyer F, & BA le petit axe prolongé vers *d*. *Fig. 115.*

Du centre C & CD pour rayon ayant fait l'arc D*d*, & tiré *d*S, cette ligne repréſentera le grand côté du cône, & AS le petit. On fera en A l'angle SAO à volonté, on portera ſur la ligne AC la diſtance CF en AO; d'où l'on tirera OS, & la même diſtance CF ſur le grand côté *d*S en *n*; on fera S*v* égale à S*n* ſur la ligne OS, puis par les points V & C, on tirera l'indéfinie VY qui coupera le petit côté du cône AS en *y*, & ſon oppoſé SB en Y, la ligne *y*Y ſera le diametre du cercle qu'on cherche : enfin par le point donné P ſur la ſurface du cône, on menera une parallele PQ à la ligne *y*Y, qu'on diviſera en deux également en *m*, la ligne PQ ſera le diametre du cercle demandé, dont *m* eſt le centre.

Etant trouvés, le diametre PQ du cercle

& ſa poſition dans le cône à l'égard de l'axe SC, on tracera le cercle ſur la ſurface du cône de la même maniere qu'une ellipſe, dont nous allons parler ci-après.

Comme la démonſtration de la ſolution de ce problême eſt un peu au deſſus d'un petit Livre d'Elémens de pratique, nous renvoyons les lecteurs qui en ſeront curieux, au ſecond Livre de ma Stéréotomie, page 216.

L'uſage de cette propoſition ne peut s'offrir que dans les traits des voûtes coniques, qu'on appelle *trompes*, dont on parlera au 4e Livre.

TROISIEME CAS.

De la deſcription du cercle ſur la ſurface d'un cône lorſqu'il eſt ſcalene.

Quoique la ſection parallele à la baſe d'un cône ſcalene ſoit un cercle, comme dans le cône droit, on ne peut cependant ſe ſervir des mêmes moyens pour le tracer, ſoit dans la ſurface concave, ſoit ſur la ſurface convexe, parce que les diſtances des plans paralleles entr'eux, priſes ſur la ſurface du cône, ſont inégales, étant différemment inclinées à l'une & à l'autre, quoique dirigées au ſommet de ce cône ; ce qui eſt évident, en ce que ceux qui approchent

le plus de la perpendiculaire ſuppoſée, abaiſſée du ſommet ſur le plan de la baſe prolongée, ſont plus courts que les côtés qui en ſont plus éloignés.

Il faut donc commencer par chercher le point de cette perpendiculaire ſur la baſe prolongée, s'il le faut, lequel y détermine la projection du ſommet du cône.

Lorſque l'axe du cône eſt aſſez incliné, pour que ce point tombe hors de la baſe, on peut l'y déterminer géométriquement par la prop. 11 du 11e Livre d'*Euclide*, qui ſert auſſi à chercher le pied du ſtile dans un cadran, ou bien méchaniquement par le moyen de deux équerres, dont un des bras eſt appuyé ſur le plan de la baſe, & l'autre en l'air, obſervant que ceux qui ſont ſur la baſe n'y ſoient pas poſés en ligne droite, mais faiſant un angle approchant du droit: ſi les branches qui ſont en l'air touchent enſemble le même point, la jonction de deux autres au ſommet de l'angle qu'elles feront, donnera la projection du ſommet du cône, parce que l'arête de leur jonction au bras, qui eſt en l'air, ne peut pencher ni d'un côté ni d'autre.

Mais ſi la projection du ſommet S tombe en dedans de la baſe, à quelque diſtance de ſon centre, on ne peut uſer de ce moyen méchanique; du ſommet S du cône comme *Fig. 116.*

d'un centre, ou plutôt un pole, on décrira un arc de cercle IEK qui coupe le cercle de la base ADBF aux points I & K; ce qui arrivera, lorsqu'on fera le rayon un peu plus grand que le côté SA, qui est dans le plan de sa perpendiculaire SCA, & plus petit que son opposé SB.

Comme le point S est en l'air, il sera plus aisé de tracer cet arc avec un cordeau arrêté en S, qu'avec un compas, surtout si le cône est un peu aigu au sommet. Cet arc IEK étant tracé, & divisé en deux également en E, on tirera les lignes EI, EK sur le plan de la base, qui feront l'angle IEK, qu'on divisera en deux également, pour avoir la diagonale EB, qui passera par le point de projection du sommet S du cône scalene, lequel sera déterminé par l'intersection de cette diagonale & le diametre du cercle IEK: par exemple, dans cette figure IK, double du rayon ES, duquel si l'on ôte la partie EA, extérieure au cône, le reste AS donnera la projection S du sommet du cône demandé sur sa base.

Cette préparation étant faite, on tracera le profil ASP du cône, c'est-à-dire une section plane, passant par la projection P du sommet dans le premier cas où elle tombe au dehors de la base, ou bien dans le

Fig. 117.

le ſecond où elle eſt en dedans, le diametre AB de la baſe ſera celui de la plus grande obliquité, s'il paſſe par le point P de la projection du ſommet S.

Sur ce diametre AB de la baſe, ayant décrit le demi-cercle ADB, on le diviſera en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à la moitié du contour du cercle demandé, dont le diametre eſt *de* parallele à AB, comme ici ſeulement en quatre aux points 1. D. 3, d'où l'on tirera des perpendiculaires à AB, qui le couperont aux points *o*, C, *r*, par où on menera des lignes au ſommet S, qui couperont le diametre *de* du cercle à tracer aux points *f*, *c*, *g*. *Fig.* 117.

Il eſt viſible que dans ce profil du triangle par l'axe du cône, les lignes *o*S, CS, *r*S qui ſont des projections de côtés du cône, paſſant par les points de la baſe 1, D, 3 ſont plus courtes que les côtés qu'elles repréſentent, parce que ces côtés ſont tous inclinés au plan de projection ASB; de ſorte qu'il faut en chercher les véritables longueurs pour en faire l'application ſur la ſurface concave ou convexe du cône, ſur laquelle leurs parties compriſes entre les plans de la baſe & de la ſection *de*, qui lui eſt parallele, doivent déterminer les points au contour du cercle, dont *de* eſt le diametre

donné. Soit, par exemple, la vraie longueur de la ligne *o* S à trouver, on transportera cette ligne en *ot* sur la base AB prolongée; la ligne tirée du point 1 de la circonférence ADB au point I*t* sera la vraie longueur de la projection *o* S; la ligne D*u* la valeur de CS, & 3*x* celle de *rs*.

Les valeurs des côtés du cône étant trouvées, il ne s'agit plus que d'avoir celle de leurs parties, où passe la circonférence du cercle demandé, qui doit passer par le point donné *d*.

Du point *o* pour centre, & *of* pour rayon, on décrira un arc *fy* qui coupera la base AB au point *y*, par lequel on abaissera une perpendiculaire à cette même base, qui coupera le côté *it* au point Y, qui sera la distance du point 1 de la circonférence de la base à celle du cercle de la section parallele, passant par le point donné *d*.

On trouvera de la même maniere sur D*u*, 3.*x* les points Z & Q, où ces côtés coupent la circonférence du cercle, dont *de* doit être le diametre, qu'on appliquera sur la surface concave ou la convexe du cône, comme il suit.

Ayant marqué sur la base du cône le diametre de plus grande obliquité AB, par la maniere que nous avons donnée ci-devant, on divisera le contour de la base en un

même nombre de parties qu'on l'a divisé dans la préparation, & l'on portera du point A, de part & d'autre, l'arc A1, ensuite A D, puis A3, &c, & par les points A, 1, D, 3, B, on tirera sur la surface du cône des lignes droites au sommet S.

On portera ensuite sur A S la distance A *d* au point donné *d*, que l'on marquera pour un point du cercle à tracer. Ensuite sur le côté 1S, on portera la longueur 1Y, qui marquera un second point de part & d'autre de A S; puis sur le côté D S, tracé à la même surface, la longueur D Z, sur 3S la longueur 3Q, & enfin sur BS la longueur B*e*; ce qui donne cinq points de la circonférence du cercle demandé d'un côté de AB, & trois de l'autre: par conséquent huits points à la surface du cône, par lesquels on tracera, à la main, ou avec une regle pliante, ne faisant toucher au cône qu'une de ses arêtes, sçavoir la supérieure de D en B, & l'inférieure de D en A. C. Q. F. F.

USAGE.

Cette proposition est une fondamentale des traits de ces voûtes coniques, qu'on appelle *trompes*, qui sont rampantes, c'est-à-dire inclinées à leurs impostes du devant au derriere, particuliérement pour avoir la

tête de cette pierre, qui en fait le fond d'une ſeule piece, qu'on appelle le *trompillon.*

CHAPITRE II.

De la deſcription de l'ellipſe ſur les ſurfaces cylindriques & les coniques, concaves ou convexes.

PROBLEME I.

Le grand axe d'une ellipſe avec un point à la circonférence d'un cylindre étant donné, & dont la diſtance à un des axes eſt connue, y tracer une ellipſe.

Fig. 118. PRemiérement, ſi le point donné eſt à l'extrêmité du grand axe, par exemple en D, on tracera ſur une ſurface plane à part, un angle BAD égal à celui de l'axe du cylindre avec le plan de la baſe, en tirant deux paralleles AD, BL indéfinie de l'intervalle du diametre AB; puis mettant une pointe du compas ouvert de la longueur du grand axe donné DB, ſur le point donné D pour centre, on tracera avec l'autre un arc de cercle *fg*, qui coupera B*l* en B; d'où tirant une perpendiculaire à BD, on aura le trian-

gle A D B, qui exprimera celui qui se fera dans le parallélogramme par l'axe du cylindre, si on le suppose coupé perpendiculairement à ce parallélogramme par deux plans passans par A B & D B.

Cette préparation étant faite, on décrira sur le diametre A B du cylindre un demi-cercle A M B; ensuite on tirera autant de perpendiculaires à ce diametre qu'on voudra avoir de points à la circonférence de l'ellipse demandé, comme 1*r*, 2*r*, 3*r*, M C, &c. qui couperont l'arc de cercle aux points 1, 2, 3, M, & le grand axe de l'ellipse aux points *e*, *e*, *e*, E, &c. par lesquels on menera autant de perpendiculaires indéfinies à l'axe B D, sur lesquelles on portera les ordonnées du cercle A M B dans le même ordre, sçavoir, 1*r* en *e*1, 2*r* en *e*2, C M en E*m*, &c; & par les points D, 1, 2, 3, *m*, B, on tracera le contour de l'ellipse qu'on doit appliquer à la circonférence concave ou convexe du cylindre, comme il suit.

Ayant décrit (par le probl. 2) un cercle sur la circonférence du cylindre par un point B, pris à volonté, & tiré par le même problême autant de perpendiculaires à ce cercle qu'on veut avoir de points à la distance les uns des autres, déterminée par les arcs A1, 1.2, 2.3, 3M, &c; on portera sur chacune de ces paralleles à l'axe, les lon-

gueurs AD, *re*, *re*, CE, &c. de part & d'autre du côté AD, en ſuivant juſqu'au point B, où le cercle & l'ellipſe ſe touchant, il n'y aura plus d'intervalle de l'un à l'autre.

Par les points trouvés, on tracera à la main l'ellipſe demandée, ou avec une baguette ronde pliante, & non pas avec une regle pliante, quoiqu'on puiſſe s'en ſervir pour tracer le cercle, parce que le développement de celui-ci eſt une ligne droite, mais non pas le développement de l'ellipſe, dont le plan n'eſt pas perpendiculaire à l'axe du cylindre : car dans ce cas, qui ſe trouve dans les cylindres ſcalenes, on peut tracer une ellipſe avec une regle pliante, & non pas le cercle de ſa baſe, par la même raiſon que le plan du cercle n'eſt pas perpendiculaire alors à l'axe du cylindre; ce qui eſt facile à concevoir. C'eſt par cette raiſon que ſi le cylindre étoit ſcalene, il faudroit conſidérer AB perpendiculaire ſur AD, côté du cylindre, comme le petit axe d'une ellipſe, dont DB, diametre du cercle de la baſe, ſeroit le grand axe : ainſi au lieu du demi-cercle AMB, il faudroit décrire la demi-ellipſe ASB, faiſant le demi-grand axe SC égal à ED ou EG, parce que la baſe oblique DGB eſt un cercle, au dedans duquel tous les diametres donnés, comme *d*B, *k*B, ſeront à des el-

lipſes ; ce qui eſt évident par la nature des cylindres ſcalenes : ce qu'il eſt facile de concevoir, après ce que nous en avons dit à la premiere Partie.

La démonſtration de cette opération eſt fondée ſur ce que toutes les ſections planes, paralleles à l'axe du cylindre, & paſſant par les ordonnées au cercle de la baſe AMB, ſont des parallélogrammes de différentes largeurs, coupés en deux également par le plan qui paſſe par l'axe & le diametre AB de cette baſe, qui leur eſt perpendiculaire, & dont les interſections avec ce plan, ſont les paralleles *re*, *re*, CE, leſquelles ſont terminées au plan de la ſection elliptique DB, qui eſt bien oblique à l'axe CE, mais auſſi perpendiculaire au plan du parallélogramme par l'axe ADLB; d'où il réſulte que les interſections de ce troiſieme plan, avec les premiers, ſont auſſi perpendiculaires au parallélogramme par l'axe, comme celle avec le plan du cercle de la baſe; mais elles ſont auſſi égales, parce qu'elles ſont terminées par les côtés des parallélogrammes rectangles, qui ſont auſſi ceux du cylindre : donc les ordonnées au diametre DB ſont égales & correſpondantes à celles du cercle de la baſe, mais non pas équidiſtantes entr'elles ; ce qui conſtitue la différence du cercle à l'ellipſe :

donc les mesures prises sur les paralleles à l'axe du cylindre *re*, *re*, C E sont les mêmes que les intervalles du cercle à l'ellipse, pris sur les côtés du cylindre. C. Q. F. F.

USAGE.

On verra dans le quatrieme Livre, que ce problême est un des plus usuels dans l'appareil des voûtes en berceaux, ou des arcades en deux circonstances, ou parce qu'elles ont quelque biais ou obliquité de direction à l'égard de leurs faces, ou parce que leur ceintre, appellé *l'arc droit*, n'est pas circulaire, mais elliptique ou surbaissé, ou surmonté: les joints des lits des voussoirs sont des lignes droites paralleles à l'axe du cylindre, soit qu'il existe dans le massif, ou qu'il soit imaginaire & supposé dans le vuide, comme dans toutes les surfaces concaves, appellées les *doëles*.

PROBLEME II.

Les deux axes d'une ellipse, ou seulement le grand & une ordonnée étant donnés, la tracer sur la surface d'un cône donné.

Il est un peu plus difficile de tracer une ellipse sur un cône donné, que sur la surface d'un cylindre, parce que dans ce dernier il suffit d'avoir le grand axe, le petit

étant donné à la baſe qui eſt invariable : il n'en eſt pas de même dans le cône, quoique le grand axe ſoit donné, il faut encore qu'il ſoit donné de poſition avec le petit axe, ou une ordonnée au grand, d'où l'on tire le moyen de connoître le *parametre*, qui eſt une quatrieme proportionnelle, 1°. au rectangle des abſciſſes du grand axe l'une par l'autre; 2°. au quarré de l'ordonnée; 3°. à la longueur du grand axe.

Comme cette ligne eſt néceſſaire pour la conſtruction de ce problême, il faut commencer par la chercher; ce que l'on peut faire ſans calcul, comme il ſuit.

Soit E L le grand axe donné, & *o d* une ordonnée à cette axe; on tirera par les points *d* & L la droite L*x*, juſqu'à la rencontre d'une droite E*x*, parallele à *od*; on portera E*x* ſur l'axe prolongé de E en H : par le point H, on menera une parallele HG à la même ordonnée *od*, juſqu'à la rencontre d'une droite DG, tirée par les points E & *d*; cette droite GH ſera le parametre cherché : car les triangles ſemblables *od*L, E*x*L donnent la proportion *o*L : *od* : : EL : E*x*; les triangles ſemblables E*do*, EHG donnent cette autre proportion, *o*E : *od* : : EH = E*x* : HG, en multipliant par ordre les termes de ces deux proportions, on aura $oL \times oE : od^2 :: EL : HG$, *Fig. 119.*

qui est une propriété caractéristique du parametre.

Le parametre étant trouvé, on cherchera la position de l'axe dans le cône comme il suit : premiérement, une quatrieme proportionnelle aux trois lignes E L, l'axe donné, HG son parametre, & S B, côté du cône, qui sera la ligne B y, qu'on portera sur ce côté de B en y, par où on menera y D, parallele à A B, qui coupera un arc de cercle S D B A circonscrit au triangle S B A au point D, par lequel on menera l'indéfinie S D F, sur laquelle on portera la longueur de l'axe donné en S G, puis on tirera G L parallele au côté S A, elle coupera SB en L, d'où l'on menera L E parallele à S G, qui sera la juste position de l'axe donné dans le cône, qu'il falloit premiérement trouver, parce qu'il est aisé de voir qu'elle peut varier de deux manieres, en l'inclinant plus ou moins, & en l'approchant ou l'éloignant du sommet.

Fig. 120.

Présentement cette position étant déterminée, il sera facile de tracer l'ellipse demandée sur la surface du cône concave ou convexe, en cherchant plusieurs points à sa circonférence.

Du point C, milieu de AB pour centre, ayant décrit le demi-cercle A H B pour la moitié de la base du cône, on abaissera sur

ſon diametre, par les points E & L, les perpendiculaires E*e* & L*l*, qui donneront *el* pour la projection de l'axe donné, & pour diametre d'un demi cercle *e*M*l*, qui ſera la projection de l'ellipſe qu'on cherche. On prendra enſuite ſur le côté SA autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à la circonférence de l'ellipſe, à commencer du point E vers A, juſqu'à L4, parallele à AB; & par les points de leurs diviſions, 1, 2, 3, 4, on menera des paralleles au diametre AB, qui couperont l'axe EL de l'ellipſe propoſée aux points *v*, *x*, *y*, L, deſquels on abaiſſera des perpendiculaires ſur le diametre *el* du cercle *e*ML, qu'on prolongera juſqu'à ſa circonférence en N, M, O, leſquelles coupant le diametre *el* aux points *r*, R, *t*, détermineront les ordonnées au cercle de projection, qui ſeront les mêmes pour l'ellipſe, en les portant perpendiculairement à l'axe donné EL, comme *r*N en *vn*, RM en *xm*, *t*O en *yo*; & par les points E, *n*, *m*, *o*, L, on tracera l'ellipſe demandée, qu'il ne s'agit plus que de tranſporter ſur la ſurface concave ou convexe du cône donnée.

Pour y parvenir, il faut tirer du centre C de la baſe du cône par les points N, M, O de la circonférence du cercle de projection les lignes C5, C6, C7 qui couperont la cir- *Fig.* 110.

conférence de la base du cône aux mêmes points 5, 6, 7, dont on portera les arcs de suite, A5, 56, 67, 7B sur le contour de la base du cône; on tirera de chacun de ces points des lignes droites 5S, 6S, 7S qui détermineront les côtés du cône sur lesquels on doit porter les distances 5*n*, 6*m*, 7*o* entre les deux donnés E & L, pour avoir les points E, *n*, *m*, *o*, L au contour de la section demandée, par où on fera passer la courbe de l'ellipse.

Mais comme toutes ces distances sont inclinées, elles ne peuvent être prises que sur la ligne AS; supposant le cône droit, la longueur A1 donnera sur 5S le point *n*; A2 donnera sur 6S le point *m*; A3 donnera sur 7S le point *o*, & A4 ou BL son égale sur B*s* le point L; ce qu'il falloit faire pour une moitié, à laquelle l'autre sera égale en tout.

La démonstration de la premiere partie de cette construction suppose trop de connoissance des sections coniques, pour qu'on puisse l'insérer dans un abrégé d'élémens de pratique; ceux qui en seront curieux, la trouveront dans le second Livre de ma Stéréotomie, au problême 35, page 231.

Quant à la seconde, qui suppose l'axe donné dans sa juste situation dans le cône, elle représente assez naturellement, en se

rappellant que la projection de l'ellipſe ſur la baſe du cône, par un grand nombre de lignes paralleles entr'elles, repréſente un cylindre, dont la baſe eſt ſur celle du cône & l'ellipſe à faire une ſection oblique de ce cylindre, c'eſt-à-dire que c'eſt une application à l'endroit où nous avons donné la maniere de tracer une ellipſe ſur un cylindre inclus dans un cône.

Il faut remarquer que nous avons ſuppoſé juſqu'ici que l'opération devoit ſe faire ſur un cône droit, c'eſt-à-dire perpendiculaire ſur ſa baſe; mais s'il étoit ſcalene, elle deviendroit un peu plus compoſée, en ce que les diſtances de la baſe, au contour de la ſection, ne peuvent être priſes ſur un ſeul & même côté du cône, comme on a fait, mais ſur des côtés inclinés différemment, dont il faut chercher les valeurs, comme nous l'avons fait, où l'on a donné la maniere de tracer un cercle ſur la ſurface d'un cône ſcalene; ce qu'il eſt inutile de répéter.

Si le cône eſt droit ſur une baſe elliptique, ce qui le met au rang des ſcalenes proprement dits, il faut auſſi opérer en cette conſidération.

PROBLEME IIIe, ET GENERAL.

Pour la description de toutes les sections coniques sur les surfaces concaves ou convexes des cônes.

Ce problême se peut résoudre très-facilement, par les seules projections horizontales & verticales de plusieurs tranches des cônes supposés coupés parallélement ou perpendiculairement à leurs bases, ou à leurs axes, sans aucun calcul, ni autres opérations géométriques, comme nous allons en donner les exemples pour les trois principales sections, qui sont la parabole, l'ellipse & l'hyperbole.

Premier exemple pour la Parabole.

Soit ASB le triangle par l'axe du cône SC, & PR l'intersection de ce plan par un autre, qui lui est supposé perpendiculaire, & parallele au côté AS, ce qui constitue la courbe, appellée *parabole.*

Fig. 121. Ayant tracé du centre C de la base le demi-cercle A*rp*B, qui en représente la moitié, on divisera la hauteur PO en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à la circonférence de la parabole, par lesquels on menera des lignes paralleles

à la baſe A B, comme 4 P . 1, 7 . 2, 6, &c. qui couperont la ligne PR aux points *d*, *e*, *f*, P, par leſquels on abaiſſera des perpendiculaires ſur cette ligne A B, qu'on prolongera juſqu'à la demi-circonférence de la baſe A *rp* B.

On abaiſſera auſſi des perpendiculaires à la même A B par les points P, 5, 6, 7 où le côté du cône eſt coupé par les tranſverſales 3 . 5, 2 . 6, &c. qui ſeront terminées à la ligne A B en des points, que la petiteſſe de la figure n'a pas permis de marquer pour éviter la confuſion.

Ces points détermineront la longueur des rayons de tous les arcs concentriques que l'on doit décrire du centre C, depuis la ligne AB juſqu'aux perpendiculaires, provenant des points de ſections de l'axe de la parabole, qui eſt la ligne R P. Ainſi le premier arc de cercle à la baſe ſera B *r*, le ſecond au deſſus ſera fait avec le rayon C *o*, où la perpendiculaire, provenant du point 7, coupe A B, & cet arc ſera terminé à la perpendiculaire *d* D, provenant du point *d* de l'axe de la parabole, où il eſt coupé par la tranſverſale 1 . 7, & ainſi de ſuite d'arc en arc, terminé par les perpendiculaires de ſuite, dont les interſections donneront la projection de la parabole *r*, *x*, *y*, Z, O, qui eſt auſſi une parabole, dont l'axe eſt *c* R, & l'amplitude R *r*.

Mais comme ce n'eſt pas celle que nous cherchons, dont elle n'eſt que la projection, il faut la chercher par les mêmes moyens que nous avons eu ſa projection, en ajoutant à la premiere figure (pour éviter la confuſion des lignes) celle de la parabole ſur ſon plan tourné en face, qui n'eſt repréſentée à la précédente figure qu'en profil, par la ſeule ligne PR.

On fera donc BQ parallele à PR, & également terminée par la ligne 4P prolongée en Q, ainſi que toutes les paralleles qui couperont l'axe BQ aux points 1, 2, 3B, par leſquels on menera des perpendiculaires à l'axe BQ, qu'on fera égales aux ordonnées de la parabole, qui eſt en projection ſur la baſe, ſçavoir BM égale à R*r*; 1X égale à *ox*; 2Y égale à *oy*; 3*z* égale à *oz*; & par les points QZYXV, on tracera la parabole demandée, qui eſt dans ſes juſtes meſures, qu'on appliquera ſur la ſurface concave ou convexe du cône, comme nous le dirons, après avoir donné les deux autres exemples de l'ellipſe & de l'hyperbole.

Second exemple de l'Ellipſe.

Soit ASB le triangle par l'axe du cône donné, dans lequel eſt ſitué le grand axe EL de l'ellipſe, dont le centre eſt en *m*.

Ayant

Ayant abaissé des points E & L, les perpendiculaires E*e*, L*l* sur AB, on tracera du point M, milieu de *el*, pour centre, le demi-cercle *edl*, qui sera la projection de la moitié de l'ellipse demandée. Ensuite ayant tiré par le point L la ligne FL parallele à AB, on divisera l'intervalle FE en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points dans la demi-circonférence de l'ellipse demandée, comme ici en 4, aux points 1, 2, 3, F, par lesquels on menera des paralleles à AB, qui couperont le grand axe EL aux points *g*, *m*, *i*, d'où l'on abaissera des perpendiculaires sur AB, qu'on prolongera jusqu'à la rencontre du demi-cercle de projection *el* qu'elles couperont aux points 4, *d*, 5, & la ligne AB aux points *o*, M, *o*; ce qui donnera les ordonnées au cercle de projection *o*4, M*d*, *o*5, que l'on portera perpendiculaires sur le grand axe EL donné, aux points *g*, *m*, *i*, par l'extrêmité desquelles *x*, *y*, *z*, on fera passer la circonférence de l'ellipse demandée E, *x*, *y*, *z*, L, qu'il faut appliquer sur la surface concave ou convexe, comme nous l'avons dit ci-devant, en posant ces points trouvés sur des côtés du cône, dont on trouvera la position, en tirant du centre C de la base des lignes droites par les points de la projection de l'ellipse sur cette base, *Fig.* 122.

4.*d*.5, qui couperont la circonférence de la baſe du cône aux points 6.7.8.

Cette préparation étant faite, on portera ſur la ſurface concave ou convexe du cône, ſur laquelle on doit décrire l'ellipſe, les arcs du contour de la baſe A6, A7, A8 ſur celle du cône, à commencer d'un point A, pris à volonté ſur la ſurface concave ou convexe, ſi le cône eſt droit, parce qu'en ce cas le commencement eſt indifférent, à cauſe de l'uniformité de ce ſolide, & des points A, 6, 7, 8, B, pour un côté; & de même pour l'autre demi-cercle, on tirera des lignes droites au ſommet S, AS, 6S, 7S, 8S, BS qui ſeront des côté du cône, ſur leſquels il faut porter les points E, *x*, *y*, *z*, B de l'ellipſe demandée, ſçavoir la diſtance AE ſur le côté AS de la ſurface du cône, A*s* ſur le côté 6*s* du cône pour avoir le point *x*, A2 ſur le côté 7S du cône pour avoir le point *y*, A3 ſur le côté 8S du cône pour avoir le point *z*; & enfin AF ou B*l* ſur le côté BS du cône pour avoir le point L.

Il eſt aiſé de comprendre que l'autre moitié de l'ellipſe ſera tracée de même par les mêmes meſures correſpondantes à même diſtance des points A & B, ou E & L. Enfin par les points marqués à la ſurface du cône ſur ſes côtés tracés, on menera une ligne courbe, qui ſera l'ellipſe demandée,

qu'on ne pourra cependant tracer avec une regle plate pliante, parce que le développement de cette courbe ſur le cône n'eſt pas une ligne droite : cependant comme elle eſt plane, c'eſt-à-dire dans un plan, on pourra en tracer une moitié, ſuivant une arête, par exemple inférieure, & l'autre moitié par une même regle pliée, en ſuivant l'arête ſupérieure ; ce qui étoit propoſé de faire.

Si le cône étoit ſcalene, il faudroit faire les mêmes préparations dont il a été parlé ci-devant, pour tracer un cercle, ſçavoir, de faire le profil du triangle par l'axe ſur le diametre de la plus grande obliquité qui paſſe par la projection de la perpendiculaire, tombant du ſommet du cône ſur le plan de la baſe prolongée, s'il le faut, lorſqu'il tombe en dehors du cercle de la baſe du cône.

Troiſieme exemple, pour l'Hyperbole.

Les moyens que l'on a pris ci-devant pour faire les préparations néceſſaires à déterminer ſur une ſurface plane, avant que d'opérer ſur une ſurface concave ou convexe du cône, ſont les mêmes pour la deſcription de l'hyperbole que pour la parabole & l'ellipſe, ſçavoir, de faire un

triangle par l'axe du cône donné, s'il eſt droit ſur ſa baſe, ou ſur le diametre de la plus grande obliquité s'il eſt ſcalene : enſuite placer dans ce triangle la ligne droite qui repréſente la ſection de ce triangle par un autre plan qui lui eſt perpendiculaire, mais ou parallele à l'axe du cône, ou qui lui eſt incliné plus ou moins, de telle maniere cependant qu'il ne coupe pas les deux côtés, ce qui eſt le cas de l'ellipſe, ou qu'il ne ſoit pas parallele à un des deux, ce qui eſt le cas de la parabole ; mais qu'il en coupe toujours un des deux, prolongé au-delà du ſommet du cône, ce qui conſtitue la ſection qu'on appelle *hyperbole*.

Fig. 123. Soit donc A S B le triangle par l'axe S C, & P H la ſection d'un plan qui eſt perpendiculaire à ce triangle, mais parallele ou incliné à l'axe S C, de maniere qu'il rencontre le côté B S, prolongé hors du cône en un point, comme D, & le côté A S en H ; la ligne D H ſera le premier axe de l'hyperbole, & H P ſa prolongation dans l'hyperbole. Si l'on diviſe D H en deux également en N, ce point ſera appellé le centre de l'hyperbole ; & la ligne tirée de ce point N par le ſommet S du cône, comme ts, ſera appellée le ſecond axe, en faiſant $Nt = Ns$.

Préſentement ayant diviſé l'intervalle

A H en autant de parties égales qu'on voudra avoir de points à la circonférence de l'hyperbole demandée, & mené autant de paralleles à la base A B, qui couperont l'axe S C aux points *d*, *e*, *f*, & le côté A H aux points 1, 2, 3, on fera des arcs de cercles du centre C, & des longueurs 1.*f*, 2.*e*, 3.*d*, A C des arcs de cercles indéfinis sur le plan de la base A D B : on abaissera ensuite des perpendiculaires sur A B par les points H, *i*, *k*, L, P, qui couperont ces arcs aux points *h*, *z*, *y*, *x*, *p*, qui détermineront les longueurs des ordonnées de l'hyperbole, à compter depuis la ligne *p h*, qui est la projection de l'axe de l'hyperbole H P.

Cette préparation étant faite, il faut ranger ces ordonnées perpendiculairement à cet axe, comme P*p* en P V, *o x* en L X, ainsi des autres; & par les points H, Z, Y, X, V, on tracera le contour de la demi-hyperbole.

Il ne s'agit plus présentement que de transporter sur la surface concave ou convexe ces points trouvés sur une surface plane, en tirant du centre C de la base par les points de la projection *x*, *y*, *z* des lignes droites qui couperont la circonférence de cette base aux points 4, 5, 6.

Ayant tiré par un point A, pris à volonté, si le cône est droit, on tirera A S au sommet, soit dans la surface concave ou dans

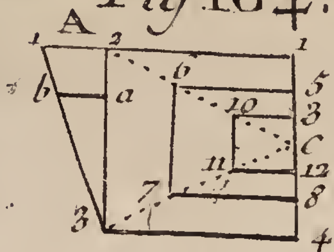
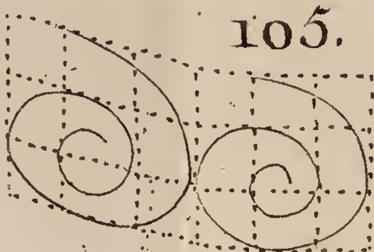
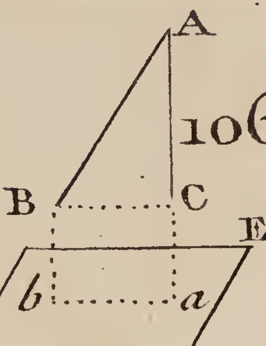
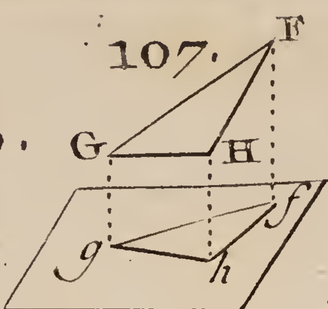
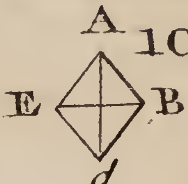
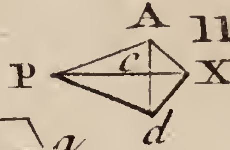
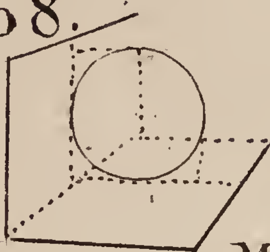
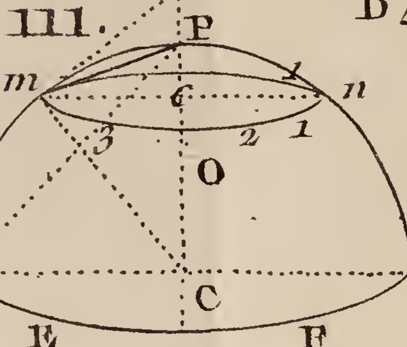
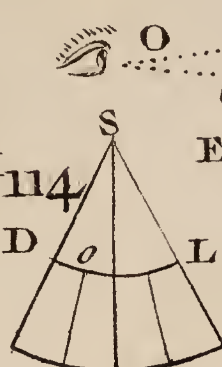
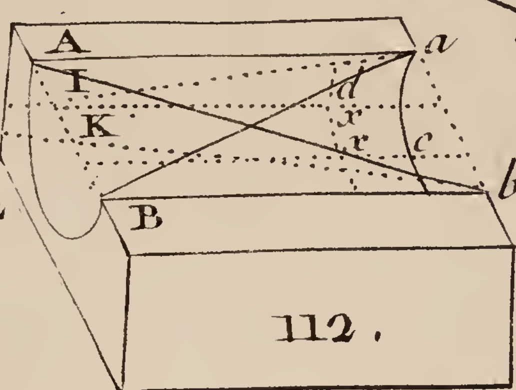
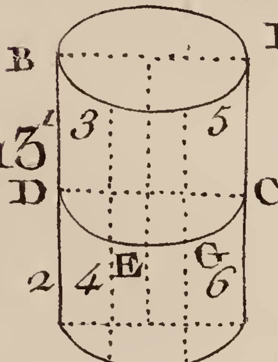
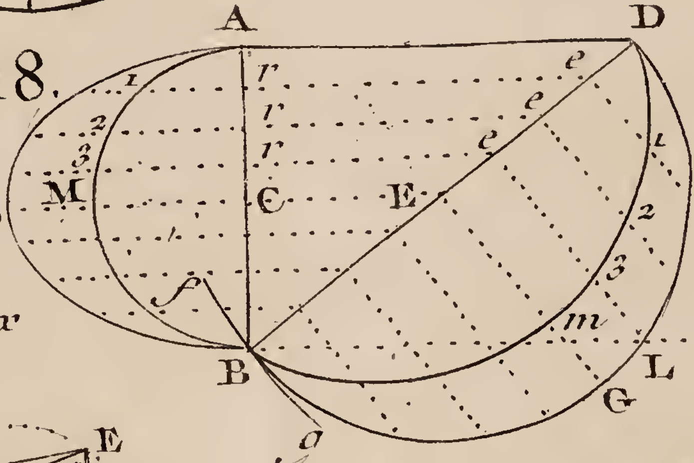
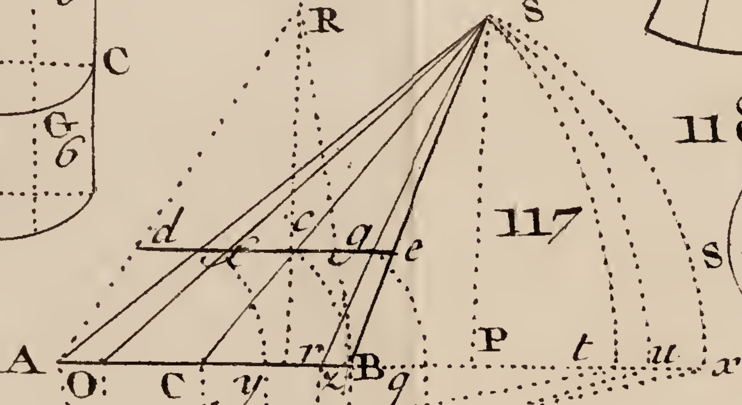
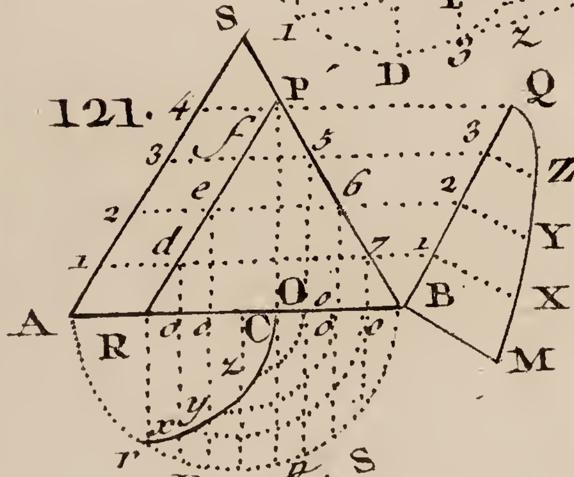
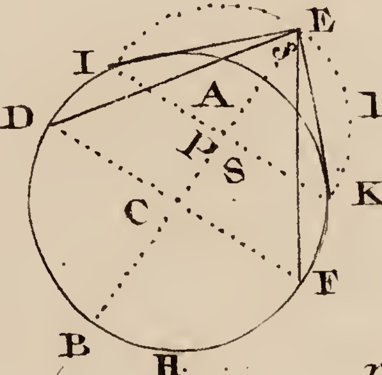
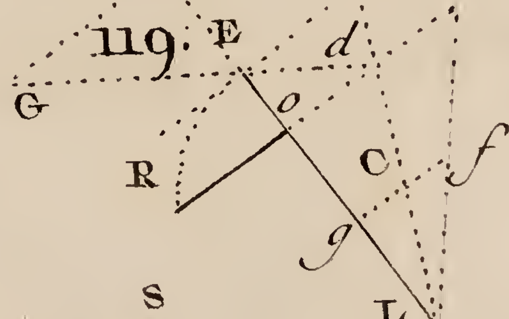
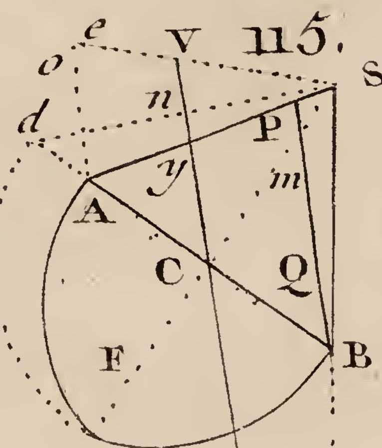
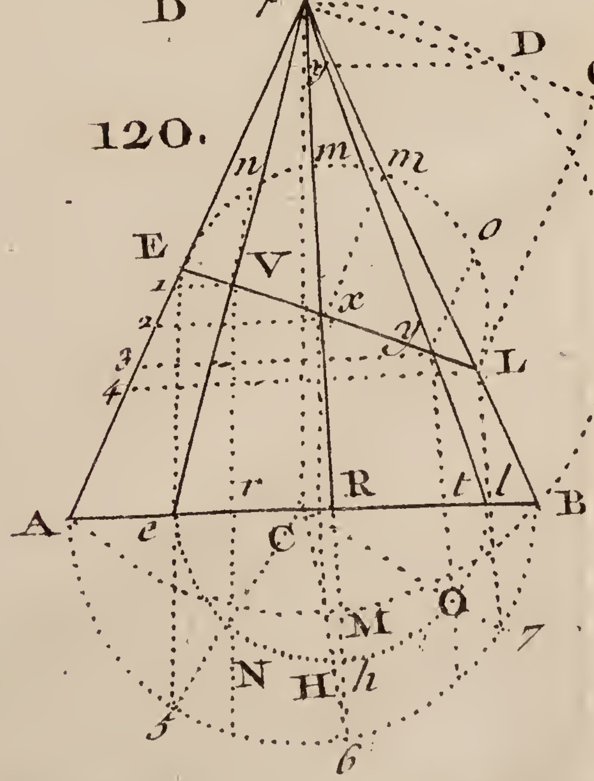
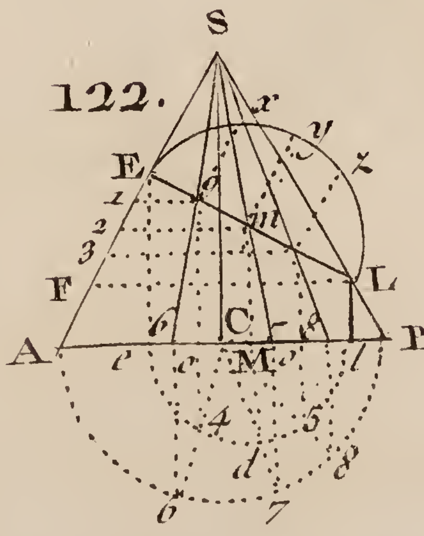
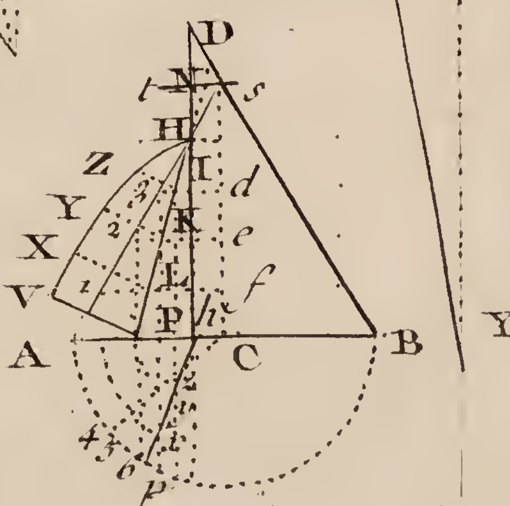
la convexe, & l'on portera à droite & à gauche de ce point A les intervalles des arcs A4, A5, A6, Ap, desquels on tirera au sommet 3 des lignes droites, qui seront des côtés du cône sur lesquels on portera successivement les distances du cercle de la base aux points de l'hyperbole à chaque tranche; sçavoir AH sur AS, A1 sur 4S, A2 sur 5S, A3 sur 6S, & l'on aura les points de l'hyperbole à la surface du cône d'un côté de l'axe AH, & autant & également de l'autre. C. Q. F. F.

Au lieu de porter les distances de ces points sur des côtés du cône, on pourroit les porter sur des cercles tracés sur le cône, parallelement à la base, comme sont les tranches, alors on porteroit l'arc 3x sur la premiere, 2y sur la seconde, 3z sur la troisieme, & le point H sur la quatrieme.

Fin du premier volume.

APPROBATION.

J'ai lû par ordre de Monseigneur le Chancelier l'Ouvrage intitulé *la Théorie & la Pratique de la Coupe des Pierres & des Bois*, par M. Frezier. Le succès qu'a eu la premiere édition de cet excellent Ouvrage, me fait juger que la seconde ne sera pas moins favorablement reçue, surtout après les changemens & augmentations que son sçavant Auteur a jugé à propos d'y faire. A Paris ce 14 Juin 1752. DEPARCIEUX.


Fig. 104.

105.

106.

107.

109.

110.

108.

111.

114.

112.

113.

118.

117.

121.

116.

119.

115.

120.

122.

123.

PRIVILEGE DU ROI.

LOUIS, par la grace de Dieu Roi de France & de Navarre : A nos amés & féaux Conseillers, les gens tenans nos Cours de Parlement, Maîtres des Requêtes ordinaires de notre Hôtel, Grand Conseil, Prévôt de Paris, Baillifs, Sénéchaux, leurs Lieutenans Civils, & autres nos Justiciers qu'il appartiendra, SALUT : Notre amé CHARLES ANTOINE JOMBERT, notre Libraire à Paris, Nous a fait exposer qu'il désireroit faire imprimer & réimprimer des Ouvrages qui ont pour titre : *Architecture Françoise par M. Blondel ; Cours d'Architecture par Daviler, avec un Dictionnaire des termes d'Architecture par le même ; Méthode pour apprendre le dessein, avec des figures & des Académies ; ÉLÉMENS DE STÉRÉOTOMIE par M. FREZIER ; Architecture moderne. De la décoration des Édifices par M. Blondel ; la Théorie & Pratique du Jardinage par M. le Blond. Œuvres de M. Belidor ; sçavoir, le Cours de Mathématique, la Science des Ingénieurs, le Bombardier François, & l'Architecture Hydraulique. Cours de Science Militaire par M. le Blond, contenant l'Arithmétique & la Géométrie de l'Officier, la Fortification, l'Artillerie, l'Attaque & la Défense des Places, la Castramétation, la Tactique, &c. Recueil des Pierres gravées du cabinet du Roi.* S'il nous plaisoit lui accorder nos Lettres de Privilege pour ce nécessaires. A ces Causes, voulant favorablement traiter l'Exposant, Nous lui avons permis & permettons par ces Présentes, de faire imprimer & réimprimer lesdits Ouvrages, autant de fois que bon lui semblera, & de les vendre, faire vendre & débiter par tout notre Royaume, pendant le tems de dix années consécutives, à compter du jour de la date des présentes. Faisons défenses à tous Imprimeurs, Libraires, & autres personnes de quelque qualité & condition qu'elles soient, d'en introduire d'impression étrangere dans aucun lieu de notre obéissance : comme aussi d'imprimer ou faire imprimer, vendre, faire vendre, débiter ni contrefaire lesdits Ouvrages, ni d'en faire aucuns extraits, sous quelque prétexte que ce soit d'augmentations, corrections, changemens, ou autres, sans la permission expresse & par écrit dudit Exposant ou de ceux qui auront droit de lui, à peine de confiscation des exemplaires contrefaits, de trois mille livres d'amende contre chacun des contrevenans, dont un tiers à Nous, un tiers à l'Hôtel-Dieu de Paris, & l'autre tiers audit Exposant, ou à celui qui aura droit de lui, & de tous dépens, domma-

ges & intérêts ; à la charge que ces présentes seront enregistrées tout au long sur le registre de la Communauté des Libraires & Imprimeurs de Paris, dans trois mois de la date d'icelles ; que la réimpression desdits Ouvrages sera faite dans notre royaume & non ailleurs, en bon papier & beaux caracteres, conformément à la feuille imprimée, attachée pour modele sous le contre-scel des présentes ; que l'impétrant se conformera en tout aux réglemens de la Librairie, & notamment à celui du 10 Avril 1725 ; qu'avant de les exposer en vente, les manuscrits & imprimés qui auront servi de copie à l'impression & réimpression desdits Ouvrages, seront remis dans le même état où l'approbation y aura été donnée ès mains de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France le Sieur DE LAMOIGNON, & qu'il en sera ensuite remis deux exemplaires dans notre Bibliotheque publique, un dans celle de notre Château du Louvre, un dans celle de notre très-cher & féal Chevalier, Chancelier de France, le sieur DE LAMOIGNON, & un dans celle de notre trés-cher & féal Chevalier Garde des Sceaux de France le Sieur de MACHAULT, Commandeur de nos Ordres, le tout à peine de nullité des Présentes. Du contenu desquelles vous mandons & enjoignons de faire jouir ledit Exposant & ses ayans causes, pleinement & paisiblement, sans souffrir qu'il leur soit fait aucun trouble ou empêchement. Voulons que la copie desdites Présentes, qui sera imprimée tout au long au commencement ou à la fin desdits Ouvrages, soit tenue pour duement signifiée, & qu'aux copies collationnées par l'un de nos amés, féaux Conseillers, & Sécrétaires, foi soit ajoutée comme à l'original. Commandons au premier notre Huissier ou Sergent sur ce requis, de faire pour l'exécution d'icelles tous actes requis & nécessaires, sans demander autre permission, & nonobstant clameur de Haro, Charte Normande, & Lettres à ce contraires : Car tel est notre plaisir. Donné à Versailles le 21e. jour du mois d'Août, l'an de grace mil sept cent cinquante-deux, & de notre regne le trente-septieme. Par le Roi en son Conseil.

SAINSON.

Registré sur le Registre XIII. *de la Chambre Royale des Libraires & Imprimeurs de Paris*, n°. 19, *fol.* 12, *conformément aux anciens Réglemens, confirmés par celui du* 28 *Février* 1723. *A Paris, le* 29 *Août* 1752.

HERISSANT, Adjoint.

